筑波数学教育研究　第 18 号　1999

研究論文

数学の弁証法的発展とその適用に関する一考察
―「表現の再構成過程」再考―

The Dialectic Model of the Changing Representation System through Mathematization

礒田正美（Masami ISODA）
筑波大学教育学系
（Institute of Education, University of Tsukuba）

数学化過程をモデル化するために，歴史上における数学の発展過程において次の点を確認した：数学を再構成しようとした数学者はそれぞれ，自身の新しいメタファーが数学を革新すると信じており，自分自身にも他者にも納得できるように，新しいメタファーの妥当性を，当時親しまれていた既存の数学を用いて確認した。歴史的事実から，新しい数学と既存の数学は対立し合い，そこでの弁証法的発展が代替的数学をもたらすという過程を確認した。その上で，先に数学化過程のモデルとして提案した「表現の再構成過程モデル（礒田 1990）」が，かような特徴を備えたモデルとして見なせることを指摘した。

This paper discusses the dialectic of mathematical development in the history and shows features of it using the articles of mathematicians who tried to reconstruct mathematics. In the dynamism of mathematical development, new mathematics and old mathematics existed concurrently and both functioned for the dialectic development of alternative mathematics. In the last part of the paper, the model of mathematization which represents the reconstruction of the mathematical representation system [Isoda, M. 1989] is demonstrated for visualizing this dialectic process.

キーワード：弁証法，矛盾，認知発達，表現，数学的活動

１．はじめに

筆者は，数学の発展過程を数学化過程としてとらえ，それに基づく学習指導と認知発達の検討を進めてきた（礒田 1995 など）。本稿では，その過程が弁証法的発展としてもとらえられることを指摘する。その意図の一つは，階段状の発達モデルを通じて数学の発展をとらえる枠組みが捨象してきたものの存在を指摘することにある。そのために筆者が先に提案した「表現の再構成過程モデル（礒田 1990，1993）」を弁証法的過程としてとらえ直す。このような捉え直しは，テクノロジーのもつマルチプルリプリゼンテーション機能によって促進される多表象選択活用型の教授・学習過程において，新課題の明確化という現実的意義を持つと考える。

本稿では，まず，数学における弁証法的発展を規定するために Imre Lakatos（1976 訳 1980）及び Paul Ernest（1994）により論じられた弁証法的発展を確認する。そして Anna Sfard（1991）の概念形成モデルを範例に，段階的な認識発展モデルで捨象されたものの存在を指摘する。その上で，数学の発展の特徴を解析の変遷を例に導く。その上で，その特徴をかつて筆者が提案した「表現の再構成過程モデル」が備えていることを指摘する。最後に，上述の問題意識に対する本稿の示唆を確認する。

２．数学的認識の発達と弁証法

はじめに，先行研究に依拠して弁証法を規定し，次に，階段的認識の発達モデルで表される発達論の課題を捨象点の存在から指摘する。

2.1　数学的認識に対する弁証法

数学的認識の発展を，ヘーゲル学派に準じてテーゼ（定立，即自），アンチテーゼ（反定立，対自），ジンテーゼ（総合，即且対自）という三段階の弁証法的発展過程に順じて説明できる

ことを指摘したのは Lakatos である[1）]。Lakatos の認識論は，多くの数学教育研究で，数学の認識過程を性格付ける規範的記述枠組みを探る意図で参照されてきた。数学教育の哲学的基盤を示す Ernest（1994）は，Lakatos の可謬主義的な認識論にヘーゲル学派の弁証法があることを，彼の未出版学位論文を引用して指摘している。

「証明手続きは，私にとって，テーゼ，アンチテーゼ，ジンテーゼという弁証法的な足跡を示す顕著な事例となっている。証明手続きの場合，数学的思考の進展は始原的仮説からはじまる。その仮説がテーゼである。このテーゼは，証明と論駁という緊張と苦闘よりなるアンチテーゼを生成する。アンチテーゼにおいて，我々は，アンチテーゼの肯定的な（ポジティブな）極である，テーゼを証拠立てるものである, テーゼをより高い水準へと押し上げる証明を, 一方で, 得る。他方で, アンチテーゼの否定的な（ネガティブな）極であり，肯定的な極を破壊するに至る反例を得る。否定的極が強力になる（さらに沢山の反例が見いだされる）ことによって肯定的な極もまた強力になる（反例に対応した補題という一層の詳述によって証明はそれまで以上に改善される），そして, 逆もまた同じで, 肯定の極が強力になる（よりよい証明解析を構成する）ことによって否定の極が強力になる（新しい反例が明確に述べられた補題によって支持される）。もちろん，証明と反例両方からなるアンチテーゼ全体は，それを萌芽として含むテーゼによって生成される。ここでジンテーゼは, 証明と論駁からなるアンチテーゼの両方の極それぞれの価値を高い水準で具現した定理である。ジンテーゼは証明と反例両方を否定しかつ内に貯蔵する。仮にジンテーゼが新しいテーゼに変わって弁証法的な過程が再び始まるとしても，私は驚くべきではない（Lakatos1961,p.51 from Ernest1994, p43」

Lakatos は，ここで弁証法の三段階，特に，アンチテーゼにおける（テーゼに対する）ポジティブな面，（テーゼに対する）ネガティブな面の両面を記し，それら両面を止揚（アウフェーベン）したものとしてジンテーゼがあることを指摘している。ヘーゲル自身は，弁証法において対立や矛盾に注目している（大論理学，中巻参照）わけだが，Lakatos は，それを推測、反例，証明という語で集約している。Ernest と同じく，哲学的基盤を探る Jere Confrey (1995,p.44)も，Lakatos の証明と論駁の過程がヘーゲル学派にあることに言及し，Lakatos の主著「数学的発見の論理」のくだりを引用している。

「（テーゼ:連続関数の任意級数の極限関数は連続，アンチテーゼ：コーシーの連続性の定義は定立を高い水準へ引き上げる，ジンテーゼ：一様収束による証明の記述，を受けて）ここで私が用いているヘーゲル的（学派の）言語は，数学の多様な発展の記述を一般に可能にするように私は思う（しかしながら, それはまた魅力とともに危険をともなう）。その言語の基礎にある発見法のヘーゲル的概念は大旨次のようである。数学的活動は人間の活動である。この活動の側面にあるもの--------いかなる人間活動でも同じように--------は心理学によって研究でき，他のものは歴史学によって研究できる。発見法はこれらの側面に第一に興味をもつものではない。しかし，数学的活動は数学を作り出す。数学，この人間活動の生産物は，それを作り出した人間活動から「自らを疎外」する。それは生きた，成長する有機体となり，それを生産した活動から一定の自律性を獲得する。それは固有の自律的な成長の法則，それ固有の弁証法を発見させる。真の創造的数学者はまさしく, 自身を人間活動においてのみ実現するこれらの法則の人格化(personification 具現)であり，化身(incarnation 人の姿・肉体を与える)といえる。しかしながら，それらの法則の化身はめったに完全ではない。人間数学者の活動は，歴史において示されるように，数学思想のすばらしい弁証法の手探りの実現にすぎない。しかし，いかなる数学者も，才能，ひらめき，素質をもつならばこの思想の弁証法と意志疎通し合い，その発展を感じとり，またそれに服従する（Lakatos1976 pp.145-146,used 佐々木力訳 p.176（括弧内引用者注記）」

ここで Lakatos は，人間活動として数学を認める。人間活動における数学（即自）は，一定の自律性を備えるようになるが，その不完全さは矛盾通じて露呈し，すなわち，当初の人間活動から「自ら疎外」して、検討の対象（対自）とすることで，再び人間活動において再創造し、自律性を高めていく（即且対自）という，人間活動における数学の弁証法的発展を想定している。Ernest は，Lakatos を尊重しつつも，彼の証明と論駁への焦点化は，逆に弁証法の適用範囲を限定していると批判し，Lakatos の上述のような弁証法を，証明と論駁への限定を外すことを提案している（図１）。Ernest のこの帰結は，数学に限定した弁証法的発展の多様な形式

とみなせる。図１の裏には無数の例が想定されるが、筆者の事例は後で述べる。

第ｎ段階における科学的文脈
背景として存在する科学的かつ認識論的な文脈（問題，概念，方法，インフォーマルな理論，証明の基準，パラダイムを含む），メタ数学的見解
テーゼ（第ｎ段階）
新しいないし改訂された仮説，証明，問題の解答，理論の提案
アンチテーゼ（第ｎ'段階）
提案に対する次のような弁証法的反応

批判的反応	肯定的反応
反例，反対尋問，論駁，提案の批判	提案の承認，提案の拡張提案

ジンテーゼ（第ｎ"段階）
提案の評価と修正

局所的再構造化	大局的再構造化
提案の修正；新しい仮説，新しい証明，新しい問題の解答，新しい問題群，新しい理論	文脈の再構造化；問題-，概念-，方法-，インフォーマルな理論-　のプールの変更。証明パラダイムと証明基準，メタ数学的見解の変更。

帰結（第ｎ＋１段階）
新たに受け入れられた，ないし拒絶された提案。ないし改訂された科学的かつ認識論的文脈

図１．数学的発見の一般化された論理としての弁証法形式（Paul Ernest, 1994）

2.2　段階的認識論の課題

van Hiele の思考水準論や，それを含んだ諸理論を包摂する形で検討された Sfard の段階的概念発達論は，数学教育研究において長らく支持されており，筆者自身も，思考水準論をこれまでの数学教育研究で採用してきた。しかし，van Hiele や Frendenthal も話題にするように，下位水準から派生しえる高位水準は一つに限らないがゆえに重要であり，それら萌芽を包摂する下位水準に対して高位水準が優位とは言えない。しかし，それが段階的発達論の補説である点に注意したい。補説が必要になるのは，段階設定する際に何が捨象されるか等を話題にする必要があるからである。以下，近年注目された Sfard の概念発達の段階的図式（Sfard, 1991, p.22, figure4）を話題に，補説を要する点を指摘するが，それはその図式の矛盾を指摘するなどの批判ではない点に注意してほしい。

以下，三点，Sfard の概念発達の段階説の課題とそれを課題とみる背景を指摘する。課題の第一は，構造的，操作的という概念の双対的な本性を模式化した段階図では，その概念を保持する者がどのような意図でそうしたのか不鮮明な点である。van Hiele の場合で言えば，文脈（学習者の目的，意図）に応じては，高位水準の思考が可能になることを付言している。意図抜きで，概念転換のダイナミズムを語ることは困難である。課題の第二は，あたかも階段を線形に上るかの如き一方向の印象を読み手に与えることである。概念転換は，その概念単独で行われるものではなく，関連諸概念との結びつきの変化にあるはずである。特に，高次概念では，関連諸概念に依拠して転換をなすことは認めやすい。課題の第三は，数学の概念の本性が二分法ではなく双対性にあることの強調が，逆に概念発達における対話への注目を弱め，弁証法的視野を損ないかねない点である。Sfard は概念の操作的，構造的という双対的な本性をコインの表裏に例える。Sfard の図では，コインの表裏は一度にみるようには記されていないが，教室を観察されれば明らかなように，様々な子どもの異なる考えは常に同時的に現れる。弁証法は，対立する立場の存在を前提にする。一つの表現を，構造的にしか解さない子どももいれば，操作的にしか解さない子どももいる。概念の本性が一元論的な双対性にあるとしても，その発

達を担う教室では様々なテーゼと様々なアンチテーゼ，そして様々なポジティブ，ネガティブな反応による対話こそ必要である。

以上の課題は，数学教育研究における多くの段階論に認められる。議論は，段階論における補説の必要，逆説的に言えば，捨象されがちな他視野の存在を指摘するためになされている[2)]。次に，以上の三点，すなわち，意図・目的，発展の非一方向性，弁証法の存在を，数学の発展の中でも，数学の発見法，特に「解析」の場合で，例証する。

３．数学史上の「解析」の変遷

以下，数学史上の「解析」と関連した発見法の変遷を，前述の観点から，特に数学者自身の声に注目して例示する。ギリシャ数学の発見法において著明な記述は，アルキメデスの「方法」とパッポスの「数学集成」にみることができる。どちらの発見法も，ユークリッド的な意味での総合の対岸にある発見法について記している。アルキメデスは，求積の証明はユークリッドの取り尽くし法によりながらも，（機械による）発見法（後に不可分量の方法のにおいて再発見される静力学的方法）を，当時の人々に伝えようとした（アルキメデス, 佐藤徹訳, 1990, p.5）。ギリシャ末のテキストであるパッポスの数学集成では，「逆向きに考える，結論を仮定する」ことによる発見法として解析の役割が, 総合(証明）とともに強調されている。

地中海世界とともに進展したギリシャ語で書かれた数学は，アラビア語による新展開を介して，ヨーロッパ新興世界の公用語ラテン語へ翻訳される。言葉で表された公式を証明する意味で図表現まで伴ったアラビア数学は，ヨーロッパで記号的表現に置き換えられ，「未知数を仮定する，すなわち求めるべきものが求まったと仮定する」（代数における）解析として注目を浴びる。その解析をもとに新数学（普遍数学）を構想したのがデカルトである。デカルトは，彼の学問的計画を記した精神(知能)指導の規則において次のように語っている。

「規則４．事物の真理を探究するには方法が必要である。～中略～昔の幾何学者たちは一種の解析（結論が得られたと仮定する）を用い，それをすべての問題の解決に広く適用していたのであるが，ただ彼らは, それを後世の者に対して出し惜しみしていた。そして現在，代数と呼ばれるところの数論の一種が盛んであるが，これは古人（ギリシャ人）が図形についてなしたこと（作図ができたと仮定する）を数（答えが求まったと仮定する）についてやろうとするものなのである～中略～かって哲学の創始者(ギリシャ人)たちは, 数学を知らぬ者には知恵の研究に入ることを許そうとしなかった。彼らには，この学問が何よりも容易であって，しかも，他のもっと重要な諸学問にとりかかるため知能を訓練し準備するのに最も必要なものだと考えられていたようである。これはいったい何に由来するのであろうか。そこで私は，彼らは何かわれわれの時代の通常の数学とは全く異なった数学を知っていたに違いないということに思い至った。～中略～この真の数学の痕跡は，あの最初の時代ではないが現代より何世紀も前に生きていたパッポスやディオファントスにおいても，まだみられると思われる。～中略～最後に，知能の卓越した人々があらわれ，あの学問を今の世に復興しようと努めた。というのは, 外来（ギリシャ以外,転じて野蛮）の名称によって「代数」と呼ばれている学問は，もしそれが負わされている雑多な数字や奇妙な図形から解放されえて，真の数学がもつべきだと考えられるところの，この上ない明瞭さと容易さを完全にそなえるに至りさえすれば，まさにあの（真の）数学に他ならない～中略～秩序と度量とが研究されるところのすべての事物が，そしてそれのみが，数学に関係するのであって，その際，そうした度量が問題にされる対象が，数であるか図形であるか，天体であるか音であるか，あるいは更に何か他のものであるかはどうでもよいのである。したがって，特殊な資料とは関係なしに，およそ秩序と度量について問題にされうるかぎりのことをすべて説明するような，ある一般的な学問（真の数学）がなければならぬことになる。そしてこの学問は，外から借りてきた言葉によってではなく，古くからあり一般にうけいれられている言葉によって「普遍数学」と名づけられるべきである。（山本信訳, pp.13-17, 括弧内引用者）」

デカルトは，「方法序説」で同じような考えを記した上で，序説の本文として試論を掲げ，その一つ「幾何学」において普遍数学の構想の具体化を進める。デカルトの「幾何学」は，乗法，除法，開平の作図からはじまる。当時知られた数とその計算がすべて作図可能なことを示した上で，ギリシャ数学で難解とされた傾斜の

問題が代数的に解けることを示す。その上で，一般解が失われたパッポスの問題の解法に言及していく。まず，ギリシャ数学でも解ける問題が，代数的にも解けることを示した上で，ギリシャ数学によってはこの時代の人が解答できない問題が解答できることを示している。デカルトは，当時の人々が信じるギリシャ数学を利用して，彼が提案しようとする普遍数学が，それを越えることができることを示したのである。

解析幾何の創始をデカルトに求める場合があるが，デカルトは図形の定義をギリシャ数学によっており，代数的定義は採用していない。今日我々が知る意味での解析幾何学はモンジュとその弟子ラクロアに確立する（Carl B. Boyer, 1968, p.521）。デカルトは原論に依拠して法線より接線を定義し，超越関数の接線の作図法を問われて自ら提案する方法では解答できず，接線概念の修正を迫られる矛盾に当面する（近藤洋逸 1945，1952，原亨吉 1975）。対立者の一人がフェルマである。デカルトに先んじてフエルマは，極値の求め方を研究し，「仮に極値が求まったと仮定する（今日で言えば極限を代入して求める方法に通じる）」議論を展開する。興味深いことは，フエルマが，曲線の極値を話題にする際に，周長を固定した長方形の面積を最大にする図形は正方形であることを題材に，その解説をはじめた点である（P. de Fermat, 1989）。当時の人が納得できる事例でその方法が有効であることを確認した上で，未知の場合へと議論を進めている。フエルマは，この極値法を接線の作図題に適用する。そして，メルセンヌを通じてデカルトと接線法において対立する。フェルマを越えようとするデカルトの接線概念の捉え直しが，弁証法的に進展する[3)]。

接線問題が微分法に発展したのに対して，求積問題は積分法に発展する。前述の不可分量の方法は，ケプラー，ガリレイが利用し，ガリレイの弟子であるカバリエリ，トリチェルリ等によって研究される。特に，トリチェルリは，1644年の「放物線の測定について」において，ユークリッド原論に従った取り尽くし法によって８回，不可分量の方法[4)]によって 12 回，求積を行い，当時の研究者にとって新しい方法とみなされた不可分量の方法を，当時よく知られた取り尽くし法と併用している（Totticelli，原亨吉 1975，ボイヤー1968）。このような吟味の背景には，同じく不可分量の方法を推進するカバリエリからトリチェルリ宛に出された反例があったことは注目に値する。誤謬を避けるには，原論で支持された方法で確認することは必要なことであった。新しい方法の妥当性を古い方法によって確認することは，新数学を創世した 17 世紀には当然行われたことと考えられる。それは，微積分の基本定理がニュートン，ライプニッツによって見いだされて後にも認められることで，例えば最初の微分法の教科書とされるロピタル（ベルヌーイ）の「無限小解析」（1696, pp.51-52）では，微分法による解答の妥当性を幾何学的に吟味する問題が例示されている(礒田 1997)。

４．「解析」の変遷にみる弁証法

以下，段階論の持つ課題である，発展に携わった数学者の意図・目的，発展の非一方向性，弁証法的視野の存在を，上述の事例で確認する。まず数学者の意図・目的を述べる。デカルトの言葉に次の点を認めることができる（他の数学者においても確認される）。

数学の再構成，新数学の創造を目論んだ数学者は；

- ○　新しい方法を持っていた。
- ○　その新方法は既存の方法より強力であると信じていた。
- ○　新方法による結果は既存の方法で支持されるべきことを知っており，その数学者においても二つの方法は併存していた。

社会的な視野から述べれば，次のように言える。

- ◎　他の人々はその数学者の新方法を必ずしも知らなかった。
- ◎　新方法を知る数学者は，知らない人々へ新方法を広めようとした。

◎　新方法を知る数学者は，知らない人々に新方法を説明し，よく知られた既存の方法でその妥当性を確認した。

上記の意図目的の記述から，新数学創造を目論んだ数学者は，既存の数学から新数学を抽象したわけではなく，既存の数学で妥当性を確認することを通じて新数学の創造を進めたことがわかる。この指摘は同時に，段階の非一方向性を支持し，対話的な弁証法を示唆している。

次に，歴史的範例における弁証法的発展について確認する。Ernest に従えば，様々な視野で，数学の弁証法的発展を確認することができる。次のように例示できる。

A．概念転換的視野

背景：新幾何学の創出が進展する 17 世紀前半

テーゼ）　デカルトの法線による接線法

曲線と接する円の代数方程式の重解条件で法線を求めて接線を得る。

アンチテーゼ）　フェルマの接線法

批判：割線と接線の関係を示唆し非代数的方程式へも拡張可能　　肯定：どちらも代数

ジンテーゼ）　デカルトの接線の再定義

B．方法転換的視野

背景：運動での不可分量の方法の成功

テーゼ）　トリチェルリの不可分量の方法

ガリレオの方法を数学の求積題に対して一般的な適用可能性を探る

アンチテーゼ）　不可分量の方法の直観性

批判：同じ研究をするカバリエリから出された反例　　肯定：取り尽くし法で正しさの確認

ジンテーゼ）　積分への定式化

C．理論転換的視野

背景）　証明法としてのユークリッド幾何

テーゼ）デカルトの「幾何学」

幾何学を代数的に解決する新発見法による普遍数学の構想

アンチテーゼ）パスカルの幾何学的精神

批判：定義と証明は幾何に依存　　肯定：発見法として代数

ジンテーゼ）　解析幾何学

代数的に図形を定義すること証明も代数的にできるように更新

D．数学表現の転換的視野

背景：砂場で推論しギリシャ語で構成されたギリシャ数学が紙上で解された状況

テーゼ）　ユークリッド流の図形表現に基づく幾何学

アンチテーゼ）　無限小幾何，代数による解析，射影

批判：発見法の喪失と代数による発見の平易化　　肯定：新方法の論拠

ジンテーゼ）　代数表現に基づく解析諸学

ここでテーゼ，アンチテーゼ，ジンテーゼは，それぞれ異なる数学理論やその一面，一部に対して割り当てられている。何をテーゼとするか，それに対するアンチテーゼは何かが異なるがゆえに，ジンテーゼも多様である。すなわち，数学史上では，弁証法的発達は，多様に捉えるることができ，発達段階のように一方向的には進展せず，むしろ派生的、複合的である。そのことを，Cの場合で再記述しよう。

ユークリッド幾何は，デカルト当時，既存の数学として支持されていた。しかし，デカルトは，代数と対照して，既存の数学に閉塞感，発見法の喪失を認め，代数的アプローチと融合した「幾何学」を新数学として構想する（テーゼ）とみなせる。デカルトは，ユークリッド，アポロニウス流の図形的定義を踏襲していたが，ウオリスの頃から代数的に図形を定義するようになり，すなわち，図形の定義の仕方を転換して

後にモンジュ，ラクロアにより解析幾何学が成立する（ジンテーゼ）。図形定義の転換が，ユークリッド幾何から解析幾何を止揚する一契機とみなせるが，何がそうさせたかは、アンチテーゼから知ることができる。

Ｃでの対立や矛盾は、Ａ，Ｂを包摂して様々な次元での対立や矛盾として存在する。Ａの場合での矛盾は，接線概念の矛盾である。デカルト自身は，ユークリッド流の発想に立ち，法線から接線を得る方法を採用した。それに対して，より今日的な発想に立つ便利なフェルマの接線法を提出され，自らの接線法も直接的な接線法へと転換する。Ａは，Ｃの内部，具体的には，デカルトのテーゼに対してなされた議論である。

Ｃのアンチテーゼはパスカルに典型をみることができる。既存の数学である幾何学の擁護者であり，射影幾何学への新しい発展（別のテーゼ）を構想したパスカルは次のように述べる。

「幾何学的精神について（題目）　一，真理の研究には三つの主要な目的がありうる。第一は真理を追求する時には，それを発見すること，第二は真理を所有する時には，それを論証すること，第三は真理を吟味する時には，真を偽から識別することである。私は第一については語らない。特に第二を取り扱いたい。そうすれば，それは第三をも包含する。なぜなら，われわれは真理を証明する方法を知れば，同時に，それを識別する方法をも知りうるであろう。～中略～これら三つの分野においてすぐれている幾何学は，未知の真理を発見する術を明らかにした。それは幾何学が解析と呼んでいるものである。しかし，それについて説くことは，すでに多くのすぐれた著述が書かれたあとでは無益であろう。（パスカル，幾何学的精神につて，冒頭，前田陽一他訳）」

解析について記したのはパッポス、デカルトである。それを尊重したので妥当性を示す意味での論証に焦点を当てることが記されている。しかし，真空をめぐって明確に対立したパスカルの対デカルト観は穏やかではなかったようで，死後にメモを編纂したパンセには次のようなくだりがある。

「76．学問をあまり深く究める人々に反対して書くこと。デカルト。～中略～　79．デカルト。大づかみにこう言うべきである。「これは形と運動から成っている」と。なぜなら，それはほんとうだからである。だが，それがどういう形や運動であるかを言い，機械を構成してみせるのは，滑稽である。なぜなら，そういうことは，無益であり，不確実であり，苦しいからである。そして，たといそれがほんとうであったにしても，われわれは，あらゆる哲学が一時間の労にも値するとは思わない（パスカル，パンセ，前田陽一訳）」

デカルトが「幾何学」の中で，定規とコンパスによる作図をそれに限らない機械作図の境界をなくした点からすれば，ここで話題にされた機械批判は，デカルトの提唱する新数学批判に通ずる。パスカルは，ユークリッド幾何学の延長線上で，新しい幾何学となる円錐曲線試論（射影幾何）を先に発表しており（パスカルのテーゼ），晩年には，無限小の幾何学を展開する[5]。パスカルは，デカルトと対峙し，さらに別の（彼なりの）方向を探ったのである。これは，先の段階の非一方向性を示す例である。

このパスカルの証明の強調は、当時の数学の雰囲気を代弁している。それがデカルトへのアンチテーゼとなって、逆に、図形定義を幾何学から代数方程式への転換する必要となったと考えられる。すなわち，幾何学に証明の根拠を求める限りにおいて，解析幾何学は単なる発見法の役回りを担うに過ぎない。解析幾何学は，図形を最初から代数的に定義することによって，はじめて代数的に議論することの中に証明を含意することができるようになった。同時にそれは，作図題というギリシャ数学における問題提示形式が，実際に作図をする必要性の乏しい幾何に転換することで，失われていくことも含意していた。解析幾何学から問題が喪失する。

Ｄの場合に言及する。微積分学や解析幾何学は，発見法の喪失したユークリッド幾何学（既存の数学／テーゼ）に対するアンチテーゼに相当した無限小の幾何，新接線法などの新数学を，止揚した代替的数学（ジンテーゼ）とみなすことができる。既存数学をネガティブにとらえて発展させた場合である。パスカルの新しい幾何学の構想（これもアンチテーゼとみなせる）は，厳密な既存の理論の延長線上での構想という意味で，既存理論のよさを見通してのテーゼに対してポジティブな側からの発展の例になる。いずれの場合も，最終的には図形表現そのものが

失われ，代数表現されるようになる。

　何を議論しようとするかによって弁証法的図式で記述する内容は様々である。アンチテーゼの論議では，そこで記述する内容よりさらに細かな次元でも利用できる事実を採用する必要が起こるが，その事実は他の弁証法的発展を語る上では別の意味で利用される。その煩雑さゆえ，数学の発展を一方向の階段に押し込めるモデルでは補説が必要になる。Lakatos が，ヘーゲルの段階を意識しながらも，彼の本論は推測，証明，反例などの用語で記述したのは，かような錯綜が本質の喪失を招きかねない状況を避けるためとも考える。さらに，Ernest が，ヘーゲル学派の段階によりながら，Lakatos を拡張的定式化するのも，かように複雑な数学の発展を整理する意図があると考えられる。

５. 弁証法からみた「表現の再構成過程モデル」

　表現の再構成過程モデル（礒田，1993）は，H. Freudenthal に基づく数学化過程を表現の再構成に注目して記したモデルである。設定に際し，van Hiele の水準論, J. Kaput の表現論, A.H. Schoenfeld の抽象化の批判的検討を前提に枠組み設定がなされ，E. Wittman の分割数の事例の教室実践がモデル存在の例証の根拠となった。

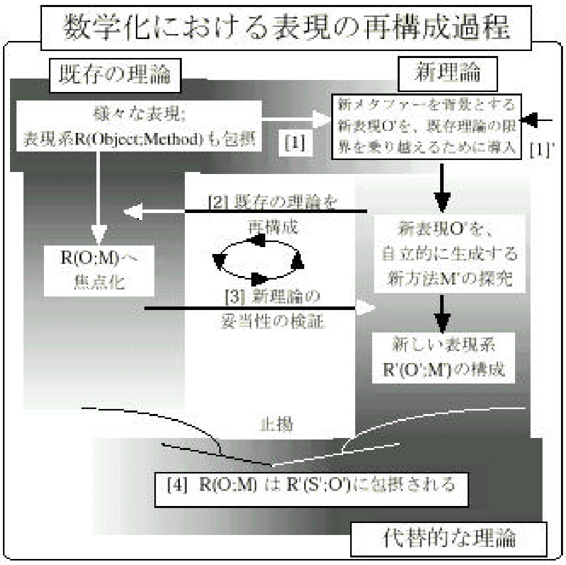

図２．数学化過程としての表現の再構成過程

図２は，そのモデルを，先述の意図・目的，発展の非一方向性，数学の発展の弁証法的過程を鑑みして，多少修正したものである。以下，数学史を例証の根拠に提出されていない図２のモデルが，すでに述べた数学の弁証法的発展に符合することをデカルトの場合で例証し，このモデルが弁証法的過程を表していることを指摘する。先のＤ．数学表現の転換的視野の場合で弁証法的発展を確認するが，その際，先のＣのデカルトの議論も参照する。

　数学化の前提として，数学化を進めようとする数学者には問題を解く上での既存の数学（テーゼ）に対する閉塞観がある。デカルトは，当時知られた代数的アプローチを幾何へ適用する新メタファーで図形的対象をとらえる（アンチテーゼ）。実際，彼の初期の研究プログラムを記したと言われる「精神指導の規則」の結論部では，一般的な量表現をメタファーとすべきことが提案されている。彼の「幾何学」では，作図題[1]の対象である線分を，同時に代数表現[1']の対象とみなしている。このメタファーにより，彼は，新しい数学（普遍数学）を発展させることを目標にした。

　新しい対象への注目は，その表現に連関した既存理論の特定表現を浮かび上がらせ[2]（テーゼのよさを整理する意味でポジティブに機能），逆にその特定表現は新理論の表現を生成する上での根拠になる[3]（アンチテーゼを力づけるのでネガティブに機能）。デカルトの場合，線分ａ，ｂの積を，長方形の面積としてではなく，相似三角形における線分算（今日的に言えば，二数直線上での計算）から，「幾何学」を書き始めた。ユークリッド原論は，元々，線分，面積，体積で比例推論を展開したわけだが，デカルトの「幾何学」では，線分における比例推論のみに焦点が当てられることになる[2]。続いて，デカルトは，パッポスが既存の幾何学で解答を与えた作図題を代数的に解き，その方法の妥当性を示す[3]。そして，パッポスの解答が残っていない問題を解答することで，その方法の強力さをアピールする。彼は，当初，すべての問題が解けると考えたが，超越関数の接線作図に関わって，その方法の限界に直面する。

新しい対象を新しい方法で自由に表現できるようになると，様々な知識が蓄積されて，再整理が必要になる。デカルトの幾何学で言えば，代数的に可能な範囲もわかってくる。既存の数学をポジティブに改編する[2]を通じて，代数方程式で捉えられる図形的対象のみに注目する状況が成立する。代数的に解決可能な範囲であれば，もはや既存の幾何学に根拠を求める必要はなくなる（[3]がネガティブに機能）。幾何学的な定義に準じてその都度，問題に応じて方程式を立てるより，最初から方程式で図形を定義した方が都合よくなる。それが一つの再構成の契機となって，解析幾何学が成立する。そこでは，ギリシャの作図題は，解析幾何学における代数的方法によってルーチンな問題と化し，代数解の存在に関わる，作図不能性の立証のような歴史的問題だけが未解決問題として残される。図形表現と代数表現の相違に注目した場合で言えば，解析幾何学は代数方程式で解ける場合に限定されているがゆえに，既存の幾何学の問題に対する十分な代替にはなりえない。射影幾何，微分幾何などが派生するのも必然である。

表現の再構成モデルとＤの弁証法的発展との対応関係は，次のようにまとめられる。すなわち，テーゼとしての既知理論，アンチテーゼとしての新理論，ジンテーゼとしての代替理論という弁証法的形式が，このモデルでは，[1]における新メタファーによる対象の出現，[2][3]による既知理論の再構成と新理論の構成の対話的進行，[4]における止揚による代替的な統合理論の成立という経過で記されている。特に，[2][3]の対話的進行は，対立というより相互補完過程として記されている。先に述べたように，それぞれの場で，個別的な対立，反例などの矛盾，葛藤が存在している。図２は，表現を主題にしているので既存の理論（テーゼ）は代替理論（ジンテーゼ）で包摂される形式で記されている。

６．むすび

本稿では，先に設定した「表現の再構成過程モデル」が弁証法的発展においてとらえられることを指摘した。Ernest の記した弁証法的形式が，様々な場面を意識し，適用し得る一般論であるとすれば，ここで提示したモデルは表現に焦点が当てられている。モデルの特性は，階段状に記されてきた発達モデルを，既存の表現系から代替表現系への弁証法的発展を構造的にとらえられる点にある。意図・目的，発展の非一方向性，弁証法的視野も，モデルには盛り込まれているが，捨象されたものに対して，やはり，以下に触れるような補説も必要になる。

米国では，代数を関数で学ぶ系統性が注目を集めている。それは，記号表現を，表（数値）やグラフ表現とを相互に関連づけて意味を認める中で，学ぶ状況を提供している。筆者自身は，その系統性には懐疑的であるが，テクノロジー環境が提供する，多表現の相互翻訳による意味創出という方法に共感する。特に，表現の再構成過程モデルは，ある表現からある表現の移行を話題にするモデルではなく，一つの表現系から代替表現系が生まれる過程を話題にしている。そこでは，多表現の関連づけの質的転換が元々の前提にある。多表現の関連づけ，意味づけを通じて数学が発展した時代として，17 世紀，科学革命期の数学を認めることができる。そこでは，様々な弁証法的発展が同時多発的に様々な規模で存在する。かような弁証法的発展の多様性は，表現の再構成過程モデルの様々な適用可能性にも通じている。

注

1) ヘーゲル自身は，この段階自体を論じていない（平凡社哲学事典，中埜 1973）が，大論理学にはこの形式がみられる。特に，Lakatos の引用中にもある積極的な面（積極者），消極的な面（消極者）は正負の数を例に次のように記されている。「＋ｙ―ｙ＝0 である。～中略～　すなわち二つの対立したものは，その結合の中で止揚される(中巻，p.61)」「（マイナス×マイナスがプラスであることを）否定［負］の否定［負］は肯定である(中巻，p.65)」この例をみる限り，ヘーゲルの数学への弁証法適用はレトリカルであり，批判も必然である（中埜 1973, pp.184-186 ，Wolff1981 訳 1984 参照），ここでは，彼の難解な議論を解するのではなく，数学の場合で再考した Lakatos を利用する。Gadamer は，ヘーゲル的な弁証法は，ヘーゲル的でないとされるプラトンによる「パルメニデス」にすでに認められることを指摘している（ガダマー，山口・高山訳，p.38）。パルメニデスの邦訳者池田美恵（プラトン著作集１，パルメニデス，補注 pp.340-349）は，パルメニデス解釈の多様さ難解さを指摘した上で，エレア派のゼノンの背理法（古代，プラトンの弁証法の

典型）に対して，エレア派の創始者パルメニデスが相反する説を仮設しそれぞれの説において肯定，否定でどのような結果が生じるかを考察していることを概観している。その範例は「１が存在するならば」「１が存在しないならば」である。かような難解さゆえにLakatosの弁証法解釈が有効になる。

[2]　Sfardからみれば，補説済みの場合もあれば，目的外の議論である場合もあるだろうが，それはここでの議論と関係ない。Sfardはconcept formation概念形成を論じているが，本稿は概念転換の立場に立つ。Sfard (1991, p.28)では，弁証法が言及されている。彼女の一元論はヘーゲルの立場に一致するが，コインの裏表に例えることのまずさは表裏の対立と止揚の捉え方の不明瞭さにある（中埜肇，1973，p.60）。また，Sfard(1994,p54)では，数概念の転換を特徴付ける話題として「全体は部分より大きいという」命題を話題にしている。この例は，併存できない，矛盾の存在を特徴付ける意味で，エレア派に遡る古代の弁証法（間接証明）にも通じる。対するヘーゲルの弁証法の新しさは，ラカトシュの引用で述べた矛盾の肯定性への注目にある（Gadamer, 1980,山口訳1990.p.38）。

[3]　近藤洋逸(1945)はその変貌を「デカルトの「幾何学」における接線（法線）法は，アルジ宛の書簡のそれへと一変し，さらにメルセンヌへの書簡では数学解析的な考えに貫かれながらもサイクロイド特有の性質を利用する特殊な接線決定があらわれてきている。だが我々としては，絶えず変転するデカルトの思惟が「幾何学」からアルジ宛書簡の接線法へと変換している過程の中で，実に注目に値する理論的発展ととげているのを見逃してはならぬ」と指摘している。

[4]　アルキメデスの著作「方法」は，1906年に発見されるまでヨーロッパ人は存在を知らなかった。

[5]　パスカルは，真空論でデカルトと直接対話して後，無限小幾何学に関心を寄せ，彼流の無限小の幾何学を展開する。そこでは，原論に忠実に議論する箇所もある（Ａ．デトンヴィルからＡＤＤＳ氏への手紙，冒頭部分参照）。パスカルは，不可分量を扱う上で，アルキメデスと同じ，またトリチェルリとも同じ，秤による静力学的方法を採用した。その再（新）発見では，先に引用したアルキメデスと同様の発見法を伝えようとする思いを綴り，デカルト同様，発見法の喪失を問題視する議論もしている（Ａ．デトンヴィル氏から前国事院勅任参事官ド・カルヴィ氏への手紙，冒頭部分参照）。これは本文で記したパスカル像とは異なる一面であるが，パスカルの発見法は，代数による解析ではく幾何学の延長線上で構想されている点で一貫している。

参考文献

J. Confrey (1995). A Theory of Intelletual Development, For the Learning of Mathematics **15**(**1**), 38-48.

Paul Ernest (1994). The Dialogical Nature of Mathematics, Paul Ernest Edited, Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective, The Falmer Press, 33-48.

P. de Fermat. Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam, OEuvres de Fermat ; T. 1er, [1], publiees par les soins de Paul Tannery et Charles Henry ; sous les auspices du Ministere de l'instruction publique (Photo Copy Version 1989), 133-179.

L'Hospital (1696). Analyse des ininiment petiis, pur l'intelligence des lignes courbes, De l'Imprimerie royale.

ImreLakatos (1976). Proof and Refutation, Cambridge University Press, 邦訳　佐々木力訳 (1980). 数学的発見の論理, 共立出版社.

A. Sfard (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies of Mathematics **22**, 1-36.

A.Sfard (1994). Reification as the Birth of Metapher, For the Learning of Mathematics **14**(**1**) 44-55.

Totticelli, De Dimensione Parabole, Opere di Evangelista Torricelli **1**(**1**), 88-138.

アルキメデス，佐藤徹訳 (1990). 方法, 東海大学出版会.

礒田正美 (1993). 学習過程における表現と意味の生成に関する一考察, 三輪辰郎先生退官記念論文集 数学教育学の進歩, 東洋館出版社, 108-125.

礒田正美 (1995). van Hieleの水準の関数への適用の妥当性と有効性に関する一考察, 筑波数学教育研究 **14**, 1-16.

礒田正美 (1997). 曲線と運動の表現史からみた代数，幾何，微積分の関連に関する一考察, 筑波数学教育研究 **16**, 1-16.

ガダマー，山口誠一・高山守訳 (1990). ヘーゲルの弁証法, 未来社.

佐藤徹 (1979). アルキメデス，彌永昌吉，伊藤俊太郎，佐藤徹, ギリシャの数学, 共立出版.

近藤洋逸 (1945). デカルトの接線法, 近藤洋逸数学史著作集 **3**, 日本評論社, 320-330.

近藤洋逸 (1951). 微積分学の形成, 近藤洋逸数学史著作集 **5**, 日本評論社, 278-323.

近藤洋逸 (1952). デカルトと逆接線の問題, 近藤洋逸数学史著作集 **5**, 日本評論社, 264-277.

サボー，中村幸四郎訳 (1989). ギリシア数学の始原, 玉川大学出版会.

デカルト，山本信訳 (1965). 知能指導の規則,世界の大思想 **7**, 河出書房, 1-72.

デカルト，原亨吉訳 (1973). 幾何学, 白水社.

パスカル，前田陽一，由木康，津田譲訳 (1959). 幾何学的精神について, 伊吹武彦，渡辺一夫，前田陽一監修, パスカル全集 **1**, 116.

パスカル (1978). パンセ, 前田陽一責任編集, パスカル, 中央公論社, 98-99.

パスカル，原亨吉訳 (1959). Ａ．デトンヴィルからＡＤＤＳ氏への手紙及びＡ．デトンヴィル氏から前国事院勅任参事官ド・カルヴィ氏への手紙, パスカル全集 **1** 数学論文集, 人文書院, 545-748.

原亨吉 (1975). トリチェルリ, 中村幸四郎，原亨吉，村田全, 数学史, 筑摩書房, 192.

原亨吉 (1975). デカルト，フッデ, 中村幸四郎, 原亨吉，村田全, 数学史, 筑摩書房, 171-176.

プラトン，池田美恵訳 (1971). パルメニデス, プラトン著作集 **1**, 勁草書房, 269-349.

ヘーゲル，武市健人訳 (1960). 大論理学 上１，上２，中，下, 岩波書店.

ボイヤー (1968). 加賀美鐵雄，浦野由有訳 (1984). 数学史, 共立出版, 130.

ヴォルフ，山口祐弘・山田忠彰・河本英夫訳 (1984). 矛盾の概念, 学陽書房.