筑波数学教育研究　第18号　1999

研究論文

概念発達プロセスの特徴づけに関する考察
～「行為における定理」の発生に焦点を当てて～

A Note on the featuring of conceptual development process
- Focus on becoming of thorem-in-action from acitivities -

小原豊（Yutaka OHARA）
筑波大学大学院教育学研究科
（Graduate School of Education, University of Tsukuba）

本稿の目的は，「行為における定理」の発生プロセスを特徴づけることによって，数学的概念の発達を「行為における定理」の発生と反省を基軸にして示すモデルを提出することである。その為に先ず「行為における定理」の拠ってたつ認識論的な前提を整理する。次いで，Dubinsky, Ed. 及び　Sfard, A. らの諸説を基に「行為におる定理」の発生プロセスを圧縮化と具象化の２つの下位プロセスで特徴づける。この試みと筆者が既に提起している「行為における定理」の反省プロセスの特徴づけから，弁証法的モデルを提出すると同時に，複線的な発達経路の分析を課題とした。

The purpose of this paper are 1) to characterize the process of how activities become thorem-in-action, and 2) to propose a model of conceptual development of mathematical conception. To this end, considering the premise of thorem-in-action (Gérard Vergnaud and Jean Piaget), and the dialectic between action and conception (Dubinsky, Ed. and Sfard, A.), we specify two subprocesses of the above process as "condensation" and "reification".　As a result, we have proposed a dialectical model from viewpoint of thorem-in-action.

キーワード：行為における定理，概念発達，弁証法的モデル

１．はじめに

近年の数学教育においては，子どもが学校内外で出会う数量や図形に関して素朴で原初的な数学的概念の萌芽をもつことを前提にした指導方法の定立が目指されている。子どもの行為に潜んでいる素朴な着想を的確に捉えて，数学的な考察の対象とさせる為の枠組みの検討はその基礎的な作業として位置づく。我々教師の指導方法の適切性を保証する為には，概念発達のプロセスの認識論的な本性の解明や，その複雑なプロセスを明確に特徴づける試みが必要なのである。「行為における定理(theorem-in-action)」とは「状況変数のある範囲に対して個人の主観によって真であることを保持される命題(Vergnaud, 1996)」と定義されるものであり，子どもの内面に生じつつある数学的概念，知識を分析する枠組みとして捉えることができる。筆者は既にこの「行為における定理」が反省を介していかに数学的な概念，知識となりうるのかについてその必要条件を抽出し，規範的モデルの提起を行った（小原 1998a, 1998b）。しかし，これだけでは「行為における定理」を基軸にして数学的概念の発達を捉える上で一面的であり，同時に「行為における定理」がいかなる過程を経て生じるのかを特徴づける必要がある。本稿ではこの問題に焦点を当て，「行為における定理」の発生と反省という視座から概念発達のプロセスを構造的に示すモデルの構築を行う。

２．「行為における定理」の方法論

2.1　不変性の措定による認識

我々が世界を認識する為にはその道具として何らかの不変性の存在を仮構する必要性がある。これはギリシャの自然哲学者以来，認識論の問題において唱えられている問題である(Whitehead,A.H.1920,池田 1989)。事物・現象

は時間を内包しており，それ自体は不変ではなく，人間は何らかの不変性を措定せずには対象を認識，記述し得ない。ここから，事物・現象に様々な不変性を措定し続ける営みを人間の知性の本質として考えることができる[1)]。そして，この不変性は我々にとって自覚的で反省し得るものだけに限らず，またそれは数学の問題解決に取り組む際にも同様に認められることとなる。

2.2　**「行為における定理」の思想的背景**

この認識論に立ち返れば，我々が子どもに何らかの数学的概念や知識を教授しようとする際には，子どもの内面にある不変性に対して反省を促すという様式が数学教育の１つの在り方になる。そしてこの不変性の確保をメルクマールとして知性の発達を捉えたのがピアジェ(Piaget,J.)に他ならない。群性体やＩＮＲＣ群などに代表されるように，ピアジェはこの不変性を措定していく上で現代数学のアイデアを大胆に用いている(Piaget,J.1950，Beth,E.W.& Piaget,J.1961)。その根底には，数学の論理と人間の心理の平行性を求める思想が存在する。この手法に対して，発達現象の全てを１元的な流れに注ぎ込んで因果系列を想定していく偏った全体性への追求であり，観察者が幼児の諸行為に論理数学的構造を投影しているというワロン(Wallon,A.)やルネ・トム(Tom,R.)らによる批判的な見解もある。しかしこのピアジェの手法は，同時に研究対象の限定の巧みさとしても解釈されうるし，発生的認識論の追究という彼の目的の限りにおいては正当といえる。そして，ソルボンヌ大学において指導を受けてピアジェ思想を継承したベルニョ(Vergnaud,G.)が数学教育に発生的認識論を反映させる為に着想したのが「行為における定理」であり，それはピアジェによる質的，量的不変性を補う関係的不変性(Vergnaud,1990a，b)とされ[1)]，故にピアジェと同様に不変性の数学的な定式化という手法が採択されている。

2.3　**「行為における定理」**

それでは「行為における定理」という着想によって，我々はいかなる議論を展開することができるであろうか。例えば，以下の一次関数の例を挙げる。

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−8	−5	−2	1	4	7	$\square_1$

表１．ｙ＝３ｘ－２の関数表［場面ａ］

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−2	0	2	4	6	$\square_2$	10

表２．ｙ＝２ｘ＋２の関数表［場面ｂ］

以下２つの場面ａ，ｂにおいて，上記の各々の関数表における$\square_1$や$\square_2$ の値を求める為に，ある中学２年程度の生徒が以下の各々の計算手続きをしていたとする。

場面ａにおける手続き：

$1+4=5$，$-2+7=5$，

$-5+\square_1=5$　より　$\square_1=10$

場面ｂにおける手続き：

$2+4=6$，$0+6=6$，

$-2+\square_2=6$　より　$\square_2=8$，

またこの生徒は自分の手続きの根拠を明確に説明できない状態にあるとしよう。この生徒の解答の背後にはいかなる認識が潜んでいるであろうか。上記の解法手続きは，「ｘが１増えるとｙも３増える」というような変化の割合が一定であることに着目した手続きなどに比べて，比較的に授業では取り上げ難いものの１つであろう[2)]。無論，それは各授業の狙いにも関わることなので一概に問題視されることではない。しかし我々教師は，上記の場面ａ，ｂにおける手続きの背後に以下のような認識を枠づけることができよう。例えば場面ａにおいて，$x_1+x_2=3$のとき，$f(x)=3x-2$とすると，$f(x_1)+f(x_2)=\{3(x_1+x_2)-2\}-2=f(3)-2=5$，つまり$x_1+x_2=3$ならば，常に$f(x_1)+f(x_2)=5$で一定になる。グラフ上では，点（３／２，５／２）を中心に点対称である。つまり，この生徒は１次関数の直線としての性質を「行為における定理」として適用していると解釈しうる[3)]。また，これは $x_1+x_2=k$（一定）として，$f(x_1)+f(x_2)=f(k)$

＋１（一定）となり，グラフは点（k／2，(f(k)＋1)／2）を中心として点対称，つまりグラフ上の任意の点において点対称であることを示している。もし我々が，生徒（行為者）がその行為においてもつ数学的な認識の反省を促すことを数学教育の在り方の１つと認めるのであれば，このように複数の問題解決場面で不変に用いられているが，公的なコミュニケーションや討論を可能する記号的表象をそれ自体に伴えていない為にややもすれば見落とされてしまう生徒の着想を，教師（支援者）が「行為における定理」として枠づけることには意義がある。実際には数学的に見て必ずしも洗練されていない生徒の素朴な行為の背後にある一定の規則を数学的な表記によって明確に記述することで，彼らが未熟ながらに説明しようと試みている数学的に重要な性質をより明確に把握することができる。そして何より，これによって生徒の知的な努力に見合った評価を教師が下す可能性を高めることができるのである。

３．概念発達プロセスとその特徴

3.1　概念発達と「行為における定理」

上記を踏まえれば，我々が枠づけた「行為における定理」がいつ，いかにして数学的な反省の対象となり，明確な概念として発達するのかが問題となる。この問題に取り組むには，まずその過程について特徴を押さえることが先決であろう。筆者は「行為における定理」がいかに数学的な概念，知識として成立していくのかについて，そのプロセスをシニフィアン／シニフィエの分化（下位過程 I）を契機に，自己の行為を対象化して感覚的な行為を心的に再構成する反省的抽象を加え（下位過程 II），証明を通して社会的な承認を得る（下位過程 III）プロセスとして特徴づける以下の規範的モデルを提出した（小原 1998）。このモデルは基本的に「行為における定理」(TA)，素朴知識(NK)，数学的知識(MK)，定理(MT)及び，諸行為 (RA) の感覚的な表出 (⇒)，諸行為の推論による自覚的表出（→）から構成されるものである[5)6)]。

	MT	→	RA_4
過程 III	↑↓		
	MK	→	RA_3
過程 II	↑		
	NK	→	RA_2
過程 I	↑		
	TA	⇒	RA_1

図１．「行為における定理」の反省プロセス

概念を理想的で厳密な定義的性格をもつもののみに限定せず，網目状の様相を呈して最終的に完結しえない途上的なものを含めて議論する概念発達の立場に基づけば，上記のプロセスを基本単位としたその連鎖のプロセスを特徴づける必要がある。これを過程 IV として検討する。

3.2　数学的活動から「行為における定理」へ

この過程 IV に関して，活動性という視点を踏まえれば，新たな数学的知識や定理それ自体が直接に新たな知識を生み出すのではなく，その知識を伴った行為者の諸活動(RA)から反省されるべき対象としての新たな知識の萌芽，即ち「行為における定理」が先ず生じることになる。そしてこの過程 IV は少なくとも以下の２つの下位過程に分けられる。まず第１が，認識状態の変容プロセスとしての圧縮化(condensation)である。これを過程 IV_1 とする。圧縮化とは，新しい数学的対象を用いることに慣れることで，長い一連の操作をより扱いやすい単位に押し込むプロセス(Sfard,A.1991)を意味する。また，これは自覚的な行為 (→) から，感覚的な行為（⇒）への回帰を意味する。例えば乗法を獲得したばかりの小学校低学年では，１桁の乗法の適用に努力を要する。しかし，いつまでも問題状況において意識的に適用されていては，解決行為は円滑に行われない。次第に，逐一それを意識せずとも乗法九九という形式によって，乗法が感覚的に適用できるようになる。そして第２が，新たな「行為における定理」の生成プロセスとしての具象化(reification)である。これを過程 IV_2 とする。具象化とは，概念を一人前(fulfledged)の対象として扱うようになるプロセスを意味する。この具象化は様々な「行為における定理」を生み出すことが予測できるが，例えば〈同数単位群の個数から全体量

を求める行為〉としての乗法概念(MC)が圧縮され，より円滑で感覚的な行為(RA$_3$)が生じる段階になると，次第にそこに可逆性が生じる。そこから，全体量の認識を前提に，単位群か（□×b＝c），または単位群の個数（a×□＝c）の何れかを導く新たな行為が発生する。つまり“部分から全体を求める”だけでなく，“全体から部分を求める”行為が生じ得る。これは具象化によって新たに暗黙的な除法としての「行為における定理」の発生と位置づけられる[7)]。

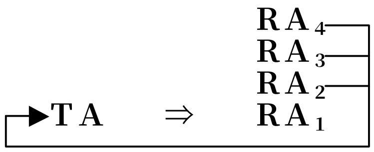

図２．数学的活動から「行為における定理」へ

ここで重要なのは「より高次な数学的概念は，既に構成した概念を用いた行為の所産として主体の内面に構成される」という見解(Dubinsky,1991a,1991b)である。これを数学的概念の発達の本性と認め，近年ドュアディ(Douady,1985)やスファード(Sfard,A.1991)らが弁証法的プロセスとして特徴づけている[8)]。またこの“ある段階における数学的な実在(entities)に対する行為がより上位の段階においては，それ自体が数学的対象になる”という彼らに共通した思想は，数学的実在のレベルに関するピアジェの議論(Piaget, 1972)をその源泉としている。

3.2　**弁証法的モデルの構築**

この図２を踏まえて，前項の図１で示した基本単位を省みた場合，数学的概念から生じる行為から，更なる「行為における定理」が発生し，それがまた新たな数学的概念として反省されていく，という一連の弁証法的プロセスが規定できる。つまり，数学的概念の認識論的本性を根拠に，数学的概念の発達を弁証法的プロセスとして捉えることで，その発達を構造的に特徴づけるモデルが提出できる。この行為と概念の弁証法に基づけば，「行為における定理」から生じた数学的概念，知識はそこで終結するのではなく，また更に新たな「行為における定理」を発生させる。あるレベルにおける行為は，より高いレベルの知識の基本的な構成単位と見なすことができる。

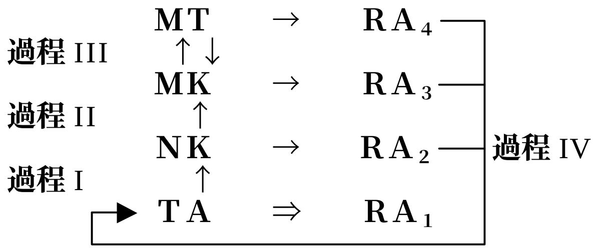

図３．概念発達の弁証法的モデル
（RA$_{n+1}$ は RA$_n$を内包する）

暗黙的な次元の不変性である「行為における定理」が言語化及び反省的抽象を通して数学的概念，知識として成立し，そしてその数学的知識や定理に基づく諸活動から，また新たな暗黙的な認識がより高次な数学的知識の萌芽としての「行為における定理」が発生する。この一連のプロセスを，より構造的に特徴づけるのが弁証法的モデルといえる。

ここでこのモデルに関して２つの留意すべき点を述べる。まず第１に，本モデルはあくまで概念発達の弁証法的プロセスを規範的に特徴づけるものである。それ故に，教授内容の細分化に基づいた段階的な指導の直接的な指針となるものではない。これは基本的立場にも関することである。例えば，数学的知識の論理性に基づいて分析，系列化し一定の順序で細分化した数学を指導しようとする立場は，数学は抽象的，形式的な知識体系であるという数学観に支えられた“数学的基礎から順序よく指導すべき”という指導観をもつ。しかし，これに対して本研究は，モデルの過程 IV の矢印が複数の始点をもつことに示されているように，数学における基礎が必ずしも子どもの認識の基礎に成る保証はなく，子どもは通常様々な素朴知識を生成し，それと相容れなければ，数学の公理系や学校数学の教育課程の系統における基礎であっても，子どもが数学を学習する上での基礎には成り得ないと考える立場に立つ。

そして第２に，本モデルは概念発達の単線的な進展を期待するものではない。なぜならば，

上述のように，本研究では予定調和的である単線型の発達経路を想定する普遍的発達観ではなく，複線型の発達経路を想定する相対的発達観を支持するからである。それ故に，概念発達のプロセスは複雑であり，その意味では「行為における定理」は必ずしも単線的，予定調和的には発生しないと考える。そこには多様な分岐点や断絶の存在が予測される。これは，学校教育がその本質として日常的な生活からは自然に発生しにくい概念を意図的かつ計画的に提供する為の営みであることからも明らかである。そして，その分岐点や断絶は，自然発生的には構成し得ない数学的概念を教授する契機を示している。以上２点を踏まえれば，このモデルは複雑な概念発達のプロセスの最も基本的な様相を構造的に特徴づけるものとして位置づく。事実上は，様々な概念発達があり得るが，数学的概念の発達プロセスを１つの理念型として想定し，その自生的な発達を権利上の問題と位置づけて究明することは，教育的に意味を持つと考える(Butterworth,G.& Harris,M. 1994) 。そして，概念発達を促進する為の働きかけは，主にその分岐点や断絶において保証されるべきであり，そこに我々教師の役割があると考えることができる。

５．おわりに

本稿では，「行為における定理」の発生プロセスの特徴づけを図ることによって，概念発達のプロセスを「行為における定理」の発生と反省を基軸にして示す弁証法的モデルの構築を行うと同時に，そのモデルの規範性と複線的発達の考慮という２つの留意点を述べた。本稿で提出したモデルは理論的検討に基づいて構築したものであり，今後より多くの具体的事例を通してその機能を詳細に検討し，修正を図る必要がある。またそれを基に「行為における定理」の発生と反省を促進ないし抑制させる為の具体的な教師の役割の実証的な探求が更なる課題となる。

註記

１）ベルニョは，数論や解析学，幾何学などの数学の体系も本質的にこの関係的不変性から構成されていると主張する(Vergnaud, 1990a,1990b)。

２）清水静海(1983)が紹介した愛知県豊川市の中学校での実践記録を参考にした。
・数学嫌いはなぜ生まれるか.－子どもの考えを大切にとはいうけれど－啓林館）

３）この方法論は本質的にトップダウン的であり，子どもの行為の意味を恣意的に歪曲してしまう危険性が伴う(拙稿,1998)。「行為における定理」を同定する際の基準の明確化については稿を改めて論じる。

４）より一般的には，$y=f(x)=ax+b$について，$x_1+x_2=k$（一定）ならば$f(x_1)+f(x_2)=f(k)+b$である。

５）本稿でいう素朴知識の素朴(naive)とは，経験のみを根拠にし意図的な検証を経ずに有されるという意味の限りで用いる。

６）本稿でいう定理(theorem)とは，必ずしも公理や定義を基礎に証明された，数学的な命題の形で記述できる数学的事実(fact)に限定せず，アイデアなども含める広い意味においての数学的な事柄を指す。

７）これは数学的に誤った「行為における定理」の場合においても同様である。なぜなら，Bloor,D.のいう「もう一つの数学」を構成する可能性を考えた場合，単純な適切，不適切の規定が困難であるからである。

８）ここでいう弁証法は，上位の類概念を下位の種概念へと論理的な分割を繰り返していく，いわばプラトンの後期の対話篇にでてくるような意味での弁証法であり，定立と反定立が止揚して総合を導くというヘーゲル的な意味の弁証法を意味するのではない。

参考・引用文献

Beth, E. W. & Piaget, J. (1961). Epistemologie mathematique et Psychologie, Presses Universitairesde France. ［ trans by Mays, W. Mathematical Epistemology and Psychology, Reidel, D. Publishing

Company, 1966]

Butterworth, G. & Harris, M. (1994). Principles of Developmental Psychology, LEA.

Douady, R. (1985). The interplay between different setting. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability - Examples from elementary school teaching. In Streefland, L. (Ed.), Proceedings of the Ninth International conference on the PME **1**, Utrecht, 33-52

Dubinsky, E. (1991a). Constructive aspects of reflective abstruction in advanced mathematical thinking. ln L.P.Steffe (Ed.), Epistemological fundations of mathematiocal experience, New York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1991b). Reflective abstruction in advanced mathematical thinking. ln D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking, Dordrecht:Reidel.

池田清彦 (1989). 構造主義と進化論. 海鳴社.

加藤義信 (1996). ワロン「行為から思考へ」におけるピアジェ批判, 加藤義信, 日下正一, 足立自朗, 亀屋和史編訳. ピアジェ×ワロン論争～発達するとはどういうことか～, ミネルヴァ書房.

小原豊 (1998a). 概念発達研究における「行為における定理」の役割－その拡張の為の展望, 筑波数学教育研究 **17**, 169-176.

小原豊 (1998b). 「行為における定理」から定理への変換に関する考察, 第 31 回数学教育論文発表会論文集, 323-328.

Piaget, J (1950). Introductional epistmologie genetique, [田辺振太郎, 島雄元訳, 1975. 発生的認識論序説 第 1 巻 数学思想, 三省堂]

Piaget, J. (1966). [滝沢武久訳 1980. 数学の構造と知能の構造 思考の誕生－論理的操作の発達, エピステーメ業書] 朝日出版社.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics **22**, 1-36.

清水静海 (1982). 算数・数学教育における学習指導法の改善についての一考察～算数・数学嫌いを生み出さないために～, イプシロン **24**, 23-44.

Vergnaud, G. (1990a). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. in Nesher and Kilpatrick (Eds.), Mathematics and Cognition, ICMI Study Series Cambridge.

Vergnaud, G. (1990b). La theorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathematiques **10**(**2**-**3**), 133-170.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields, L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A, Goldin, B. Greer (Eds.), Theories of Mathematical Learning, LEA.