筑波数学教育研究　第18号　1999

調査報告

積分における高校生の概念理解への考察

A Study with Concept Understanding on Integral

塚原成夫（Sigeo TSUKAHARA）
開成学園
（Kaisei Junior and Senior High School）

D.トールと S.ビンナーは概念定義と概念イメージの乖離という観点より学生の概念理解における問題点を明らかにした。筆者は日本の高校生を対象とした調査研究により彼らの研究結果を追証したのである。今回の研究の目的は，前回の研究により新たに解明されたところの高校生の積分理解における問題点を，異なる被験者を対象にして改めて確認することである。さらに，定積分は面積を表現するという教科書の解説部分が高校生には全く受け入れられてはいないという問題点について，改善するための教授上の方策を探究することもあわせておこなう。

Tall, D. and Vinner, S. clarified concept misunderstanding of students, from viewpoint of confusion between concept definition and concept image. The writer's studies confirmed their consequences by the research for Japanese high school students. The aim of this study is that the troubles are revirified, which were discovered by the preceding study. Japanese mathematical textbooks teach the students that definite integral represent an area. But the preceding study clarified that the students couldn't understand this explanation. This study searches for a instructional means of improving this trouble, also.

キーワード：定積分，面積，concept definition，concept image

１．序

Tall, D. と Vinner, S. は関数の連続性，接線概念等々に関する一連の調査を通して学生の概念理解に対する問題点を concept definition と concept image という観点より提起した（Tall & Vinner(1981), Vinner(1987;1991)）。即ち，学生はフォーマルな concept definition よりも学習に関連して派生したところの様々な concept image〔concept に関連するところの認知構造全体(Tall & Vinner(1981))〕を概念定義として受け入れる傾向がある。塚原(1996)は高校生を対象にして同様の調査をおこない，彼らの結果を確認した。また塚原(1997)では新たに積分概念について高校生を対象にして調査をおこない同様の問題点が存在することを追認したのである。同時に積分概念特有の問題点も明らかにされた。即ち，被験者の高校生の多くは定積分の定義として，教科書が教えるような逆微分による定義を採用せず区分求積による考え方を採用する。また逆微分により定義された定積分が曲線とｘ軸との間の面積を表現することを解説する教科書の説明（図２参照）が被験者には全く受け入れられていないということである。

今回の調査研究では塚原(1997)と同じ調査問題を別の被験者にテストすることにより，前回の結果の信頼性を確立することを一つの目的とする。また逆微分により定義された定積分が曲線とｘ軸との間の面積を表現することを解説する教科書の説明が高校生には全く受け入れられていないという現状を改善するための教授上の方策を探求するためのデータを得ることも目的とする。

２．調査方法

Ａ高校２年生 78 名に対して，塚原(1997)と

同じテストである図１を前回と同時期の２月末に 50 分で実施した。被験者は全員が理系志望である。A高校はいわゆる進学校としてトップクラスに位置していると評価されている高校である。塚原(1997)の被験者と今回の被験者とは年度としては１年異なっている。しかしA高校には毎年トップランクの生徒が集まるという特徴より，前回とほぼ同学力，同質の被験者を対象にした調査と考えて誤りはない。今回の調査では図１の他に，微分に関係する問題を図１とほぼ同じ形式にて３題出題した。前回の調査から，A高校の被験者に対して図１のテストを１時限 50 分で実施するには問題量がかなり少なすぎたという反省からである。微分に関する調査結果に関しては別の機会に発表する予定であり当論文ではこれ以上触れないこととする。

図１のテスト問題の目的は次の通りである。

被験者は高校２年時までで高校数学の履習を一通り終える。そこで，高校２年終了時にあたり，積分の定義を被験者に再確認させたいという教育目的が図１のテストを実施した動機であった。そこでＱ３，Ｑ５の形式で直接的かつ抽象的に積分の定義を問うことはおこなわないこととした。即ち，Ｑ１において被験者に具体的に計算をさせることにより，積分をしたのちに微分をするならばもとの関数に戻ることを確認させる。Ｑ２では同じことを公式の証明を通して抽象的に確認させる。この２問により，積分の逆微分による定義を被験者に想起させたうえで，定積分の定義を問うＱ３を課したのである。

Ｑ４，Ｑ５の関係も同様である。Ｑ４において区分求積の具体例を扱わせたのちに，「定積分と区分求積」の項目を被験者が正しく理解しているかＱ５において質問したのである。この問いのポイントは，教科書が教えるように逆微分により定義した右辺の定積分と左辺の区分求積とが，高校段階ではその存在を仮定する面積概念を仲介として一致するのだということである。以上がテスト問題に対する説明である。

被験者の積分についての履修状況は次の通りである。

A高校は進学校と評されている高校であり標準的な高校カリキュラムよりも履習進度が早い。高校１年時に数学 II「微分と積分」を，高校２年時に数学 III をそれぞれ履修を終えており積分を十二分に学習していると言える。

塚原(1997)と異なり今回の調査目的に加えられたポイントは，序に述べたように，逆微分により定義された定積分が曲線とｘ軸との間の面積を表現するという図２に見られるような教科書の説明が高校生には全く受け入れられていないという前回の調査研究より明らかにされた生徒側の問題点を改善するためのデータを得ることである。そこで以下のような調査上の工夫を加えた。被験者は高校２年時，10 月より２月までの間，数学 III における積分の項を学習した。筆者は彼らの授業担当者であることを利用して，まず面積の節にて数学 II の復習として図２を解説した。さらに同様の考え方を利用する，体積の公式，曲線とｘ軸との間に囲まれた部分のｙ軸回転体の体積の公式の２度，合計３回，約半年にわたり図２の解説を強調しながら繰り返したのである。前回と比較してこの様な教授上の工夫をおこない，その教育効果を調べることとした。

図２の考え方のポイントは積分の平均値の定理 $\int_a^b f(x)dx = f(t)(b-a)$ におけるｔの存在を面積をもとに直観的に認めることにある。

３．調査結果

テスト結果を集計したものが表１，表２である。

前回の調査結果との比較が可能となるように前回と同じ方法で集計をおこなっている。表１は各問に対する結果を三つの表に分けて集計している。まず被験者の大部分が正解するＱ１，Ｑ２，Ｑ４を一つの表にして，各問に対する正解率，不正解率をパーセント表示している。括弧内の数値は比較可能となるように前回の調査結果を引用したパーセントによる数値である。（以下全て同様である。）なおＱ４では

$\int_1^2 x^2 dx$　等々正しい積分の式を書いたものは

その後の計算を誤っても正解と分類している。「区分求積と定積分」を理解していると解釈出来るからである。

Ｑ３については次のように分類する。筆者が目標としたように教科書が解説するところの逆微分による考え方により定積分を定義したものを「逆微分」と，次に区分求積の考え方を利用して定積分を定義しようとしているものを「区分求積」とまず分類した。残りの答案の中には，曲線とｘ軸との間の面積等々面積と答えている答案が数多く存在していたのでその特徴をとらえて「単純面積」と分類した。その他の答案はすべて白紙あるいは全く意味を成さないものなので「無解答他」と分類した。

Ｑ５に関しては，当初の目標通りに面積概念を前提として図２のような説明を与え，右辺の逆微分により定義された定積分も左辺の区分求積の極限も面積に一致するので等式が成立するとした被験者はわずか１名であった。残りの被験者は，区分求積の考え方を説明して左辺の極限が面積を与えるので右辺の定積分と等しくなるとしたものと（彼ら全員には右辺の定積分が面積を表現していることは当然の前提となっている。図２のような形式で逆微分によって定義された定積分が曲線下の面積を与えることへの説明を与えたものは前回と同じく一人も存在しない。），白紙あるいは全く意味を成さないものとに前回同様に完全に二分された。そこで後者を「（B）無解答他」と，また前者を区分求積の考え方を理解するものとして最初の１名とあわせ「（A）説明あり」と分類してある。

表２はＱ３とＱ５の関係を調べた結果を表にしたものである。即ち，Ｑ３において「逆微分」，「区分求積」，「単純面積」，「無解答他」と分類された被験者がＱ５において（A），（B）いずれに分類されているか実数値にて表現している。左側の欄が（A）項に，右側の欄が（B）項に分類された被験者数を表す。カッコ内の数値は前回からの引用である。なおＱ３では「逆微分」と「区分求積」，「逆微分」と「単純面積」の両方に分類された被験者が１名ずつ存在したので合計が 80 名となっている。

以上がテスト結果を集計した表１，表２に関する説明である。

４．考察

最後に調査結果に基づき考察をおこなう。

今回の調査目的のポイントは既述したように２つある。前回の調査との比較および図２の説明を繰り返すことによりどの程度被験者に受け入れられるかを調査することである。

後者に関しては既にふれたように，Ｑ５において筆者の目標通りの説明を与えた被験者はわずか１名のみであった（なお前回は０名であった。）。今回おこなった調査上の工夫は被験者に対して全く効果がなかったと断言できる。逆微分により定義された定積分が面積を表現することを高校生が学習するには今回の調査により，教科書の説明を何度繰り返しても教授上の効果はなく，現状とは全く異なる形式の教授上の工夫が必要となることが解明されたといえる。被験者が学習することを要求されている練習問題の多くは定積分が面積を表現することを知っていれば十分であり図２を理解する必要はない。被験者は現状のままで何の不便もないのである。大学入試の形式に変化が生じない限り被験者に変化の起きようのない論点とも言える。今回の調査研究より図２の学習効果は存在しないことが当論文より得られた知見である。

次に当論文のもう一つの目的である前回の結果との比較を行う。表１より理解できるように全体として，得られた数値に多少のばらつきは存在するが，前回の調査で解明されたところの特徴を持つデータを改めて得ることができたと言える。なぜならばＱ１，Ｑ２，Ｑ４の正解率は今回も高率と言える。Ｑ５では既述のように１名を除き前回と同様に（A）項，（B）項に完全に二分され（A）項に分類された者のほうが多数派となっている。そのうえ（A）項に分類された者の議論方法が既に述べた通り前回と全く同じ論法となっている。Ｑ３においても「逆微分」と分類された被験者はやはり 20 パーセントほどであり前回同様少数派となっている。以上を総合するならば，前回の調査研究の

信頼性の確立という当初の目標は達成されたと言える。

細かな違いとして，Ｑ３，Ｑ５において「無解答他」と分類された者が今回のほうが多少多くなっていることが他の数値のズレと比較して注意を引く。改めて，「無解答他」と分類された答案を点検することにより次のように考えるのである。既述のように図１のテストを 50 分で実施するには長すぎるという反省より，今回のテストでは微分の問題を３題追加したのであった。今度は逆に試験時間が短くなったようである。終了時間になっても提出しない者が多く，筆者が実施監督中に実感したことでもある。前回と比較してＱ１，Ｑ２の正解率は下がっているのに比較して，区分求積の具体的な計算問題であるＱ４の正解率は上がっている。50 分の実施時間では問題量が多すぎて区分求積についての煩わしい説明の要求されるＱ３，Ｑ５を避けた被験者が増えたと考えられる。あるいは区分求積の観点からはＱ３とＱ５は重複していると言える。そこで両方に解答する労をとる被験者が減ったのが原因とも考えられる。Ｑ３とＱ５の関係を示す表２を観察すると前者の被験者が多いことを知る。個人インタビューは実施してはいないのでこれ以上の判断は無理といえる。

結論として，多少の違いは存在するが逆微分により定積分の定義をとらえている者は少数派であること。定積分の concept image は面積であるという前回の研究より明らかにされた特徴を示すデータを今回の調査からも得ることができたといえる。被験者のような高校生が積分をどのように理解しているかは２回の調査より確認されたといえる。

今後の課題としては，標準的な高校生，履習進度を考慮すれば３年生に対して同様の調査をおこなうことである。著者の現場経験より今回と類似した調査結果が得られると予想される。そこで，高校生全体への議論へと発展させることである。

参考文献

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics **12**(**2**), 151-169.

Vinner, S. (1987). Continuous functions-images and reasoning in college students, in J. C. Bergeron et al. (Eds.), Proceeding of the 11th International Conference for PME **3**, 177-183.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, in D. Tall (ed.), Advanced mathematical thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 65-81.

塚原成夫 (1996). 高校生の微積分理解に関する一考察, 第 29 回数学教育論文発表会論文集, 127-132.

塚原成夫 (1997). 高校生の積分概念に対する理解への一考察, 第 30 回数学教育論文発表会論文集, 451-456.

図 1

Q1. $g(x)=\int_a^x (t^3+t^2)dt$ について,

(1) $g(x)$ を求めよ.

(2) $g'(x)$ を求めよ.

Q2. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ を証明せよ.

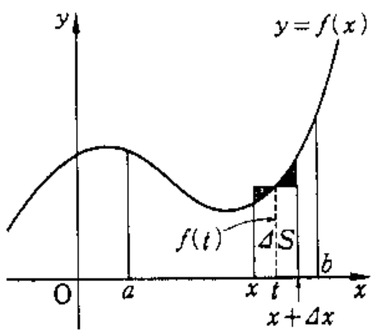
Q3. 定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の定義について述べよ.

Q4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$
を求めよ.

Q5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$ (ただし, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\Delta x$) を説明せよ.

[$f(x) \geqq 0$ の場合について説明すればよい.]

図 2



$$\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(t)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$$

$$\frac{dS}{dx}=S'(x)=f(x)$$

表1

	正解	不正解
Q 1	93.6 (98.5)	6.4 (1.5)
Q 2	91.0 (95.5)	9.0 (4.5)
Q 4	93.6 (85.1)	6.4 (14.9)

	（A）説明あり	（B）無解答他
Q 5	55.1 (65.7)	44.9 (34.3)

	逆微分	単純面積	区分求積	無解答他
Q 3	20.0 (23.7)	35.0 (31.9)	20.0 (31.9)	25.0 (12.5)

表2

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">逆微分</th><th colspan="2">単純面積</th><th colspan="2">区分求積</th><th colspan="2">無解答他</th></tr>
<tr><td>Q 3</td><td colspan="2">16
(17)</td><td colspan="2">28
(23)</td><td colspan="2">16
(23)</td><td colspan="2">20
(9)</td></tr>
<tr><td>Q 5</td><td>12
(11)</td><td>4
(6)</td><td>18
(16)</td><td>10
(7)</td><td>10
(17)</td><td>6
(6)</td><td>6
(5)</td><td>14
(4)</td></tr>
</table>