

中学校数学における証明の機能に関する一考察

牧野智彦

1. 研究の意図・目的

証明に関する生徒の学習状況は望ましくない状況にあるということが多く報告されている。筆者は証明を命題が真であることを示す役割だけであるという偏った捉え方をしていることが、この原因ではないかと考える。そこで、証明の機能を明らかにし、他の機能に着目した指導をすることが生徒の学習状況を改善する一つの方法であると考え。

そこで、本研究では、現状を改善するために、実際に他の証明の機能を使うことができるようにするための方法を提示し、証明指導の改善の示唆を与えることを目的とする。本研究では、以上のような目的を達成するために、以下のよう

【研究課題1】：数学における証明の機能について考察する。

【研究課題2】：数学における証明の機能をもとに、学校数学において証明の機能を活かすために、学校数学における証明の機能をどのように捉えるかを考察する。

【研究課題3】：学校数学における証明の機能について実際に証明問題から、それぞれの機能を具体的に分析し、これらの機能を活かすための方法を考察し、指導への示唆を与える。

2. 論文の構成

序章 本研究の意図・目的・方法

第1節 本研究の意図・目的

第2節 本研究の方法

第1章 数学における証明の機能

第1節 De Villiersの研究の背景

1-1-1 教育現場における問題

1-1-2 証明の捉え方の問題

1-1-3 証明が与える数学的な意味

第2節 De Villiersにおける証明の機能

1-2-1 立証/確信の手段としての証明

1-2-2 説明の手段としての証明

1-2-3 体系化の手段としての証明

1-2-4 発見の手段としての証明

1-2-5 コミュニケーションの手段としての証明

第3節 De Villiersの研究の成果と限界

1-3-1 De Villiersの研究の成果

1-3-2 数学教育からの見直し

第4節 本章のまとめ

第2章 学校数学における証明の機能

第1節 証明の機能間の関係と学校数学の要請

2-1-1 De Villiersの5つの機能間の関係

2-1-2 内容領域に関する要請

2-1-3 内容系列に関する要請

第2節 De Villiersの5つの機能の修正

2-2-1 第1にはたらく機能(立証と納得・説得)

2-2-1-1 内容領域に関する要請

2-2-1-2 内容系列に関する要請

2-2-2 第2にはたらく機能(体系化)

2-2-2-1 内容領域に関する要請

2-2-2-2 内容系列に関する要請

2-2-3 第3にはたらく機能(命題の演繹的な生成と社会的洗練)

2-2-3-1 内容領域に関する要請

2-2-3-2 内容系列に関する要請

第3節 証明の機能から考察される証明指導の意義と証明指導への示唆

2-3-1 立証の機能に留まらない証明

2-3-2 証明の構成要素の見直し

第4節 本章のまとめ

第3章 学校数学における証明の機能についての事例分析

第1節 De Villiersの問題とその証明

第2節 学校数学における証明の機能についての具体例

3-2-1 第一にはたらく機能(立証と納得・説得)

3-2-1-1 立証の機能

3-2-1-2 納得・説得の機能

3-2-2 第二にはたらく機能(体系化)

3-2-3 第三にはたらく機能(命題の演繹的な生成と社会的洗練)

3-2-3-1 命題の演繹的な生成の機能

3-2-3-2 社会的な洗練の機能

第3節 証明の機能を活かした証明指導のための視点

3-3-1 証明の見直し

3-3-2 問題の構造

3-3-3 証明指導への示唆

第4節 本章のまとめ

終章 本研究のまとめと今後の課題

第1節 本研究のまとめ

第2節 今後の課題

3. 論文概要

【第1章】De Villiers は数学者の活動をもとに、証明の機能を分析し、次のような5つの機能を示した。

<立証(verification)>...命題の真に関係する機能。

<説明(explanation)>...なぜその命題が真であるのかの洞察を与える機能。

<体系化(systematisation)>...公理, 主な概念, そして定理の演繹的な体系の中に多様な結果を位置づける機能。

<発見(discovery)>...新しい結果を発見・発明する機能。

<コミュニケーション(communication)>...数学的な知識を伝達する。

この5つの機能の提案は、証明に対する偏った見方を改善するための視点を示していると考えられる。しかし、De Villiers が示した証明の機能にはいくつか不十分な点がある。従って、De Villiers が示した数学における証明の機能を捉え直して、学校数学にこれらの証明の機能を活かすために修正が必要であるということを目指した。

【第2章】本章においては、De Villiers の数学における証明の機能を、学校数学にこれらの証明の機能を活かすために修正した。修正された証明の機能は以下のようになった。

第1にはたらく機能

<立証>...命題の真を示すことができる機能。

<納得・説得>...命題が真である理由としてその命題が言及する対象に固有な性質を示すことができる機能。

第2にはたらく機能

<体系化>...個々の命題を演繹的な体系の中に位置づけることができる機能。

第3にはたらく機能

<命題の演繹的な生成>...命題を成り立たせている要素に着目して新しい命題を生成することができる機能。

<社会的な洗練>...人と人とのやりとりの中で、前提の過不足, 演繹的な推論の誤り, 反例, 証明の別な道筋, 新しい定理の発見をすること

ができる機能。

そして、これらの機能を学校数学で活かす意義を明らかにした。

また、立証に留まらない証明の機能を引き出し、これらの証明の機能を活かすために、証明を振り返る活動が有効であることを示した。

【第3章】本章において、第一に、学校数学における5つの証明の機能が具体的にどのようなものであるかを証明問題を用いて示した。第二に、証明問題を用いて、証明を振り返る活動が、他の証明の機能を引き出すきっかけになることを明らかにした。第三に、証明を振り返ることによって得られる新しい命題の発見は、もとの命題の構造に依存することを明らかにした。

4. 今後の課題

筆者は今後、本研究で示した5つの証明の機能やそれらの機能を実際に使えるようになるための方法である証明を振り返る活動をもとに、証明を探究活動の中に位置づけて、証明は探究活動における方法であるという見方を生徒に身につけるための証明指導を考えていきたいと考える。

5. 主要参考・引用文献

清水静海 (1990). 論証, クレセール中学校数学科教育実践講座 第6巻 図形と論証, ニチブン, 204-236.

清水静海 (1994). 証明の指導の真の根拠を問い直す - 幾何の指導を通じて児童・生徒は何を学習すべきか -, 日本科学教育学会年会論文集 18, 77-78.

杉山吉茂 (1975). 証明の意味 - demonstration と proof, 日本数学教育学会誌 57(5), 23-27

宮崎樹夫 (1993). 学校数学における証明の意義に関する考察 - 証明の機能に焦点を当てて -, 筑波大学教育学系論集 18(1), 155-169.

De Villiers (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics, Pythagoras 24, 17-24.