

高等学校数学における証明指導に関する一考察 ～不等式の証明に焦点を当てて～

渡辺顕能

1. 研究の意図・目的

「証明」は学校数学の中でも、生徒が困難を覚える内容としてよく指摘され、証明に関する研究、実践報告などが数多く存在している。しかし、証明の対象として扱われているものの中でも「不等式」となると、その内容についての研究はあまり見ることができない。だが実際には生徒は「不等式の証明」において、様々な要因に基づく困難を持っていると予測できる。本研究では、その中でも、特に「不等式の証明」に取り組む際に生じる望ましくない証明観について、証明観を望ましいものへと改善するための示唆を得ることを目的とする。なぜなら、証明の意味を知ることが証明指導の主要な目的(宮崎, 1996) となるからである。

2. 論文の構成

序章 研究の意図・目的・方法

第1章 高等学校数学における証明指導

1 学校数学における証明指導のねらい

1-1 証明をどう捉えるか

1-2 証明指導の教育的価値

2 高等学校数学における証明指導のねらい

2-1 中学校数学における証明指導

2-2 高等学校数学における証明指導

3 証明観の規定

3-1 証明指導における証明観の役割

3-2 先行研究における証明観に関する議論

3-3 本研究における証明観

第2章 高等学校数学における不等式の証明指導

1 不等式の指導の役割

1-1 不等式の基本性質

1-2 学校数学における不等式の指導

2 不等式の証明に関する証明観

2-1 不等式の証明方法

2-2 不等式の証明問題

第3章 不等式の証明指導の改善への提案

1 実態調査

1-1 生徒の証明観を捉えるための枠組み

1-2 実態調査

1-2-1 第1次調査

1-2-2 第2次調査

1-2-3 面接調査

1-3 各セッションを通しての考察

2 不等式の証明指導の改善への示唆

2-1 提示方法の多様化による生徒の証明活動の開示

2-2 生徒による命題構成活動の役割

終章 研究の結論と今後の課題

3. 論文の概要

【第1章】第1節では、証明が教育的にいかなる価値を持っているのかを、秋谷(1964)や林(1959)らの先行研究をもとに論理的思考力の育成という面から整理した。また第2節において、中学校・高等学校で扱われる証明指導の目標・内容を学習指導要領を基に明らかにし、そこでのねらいが、見通しをもって論理的に考察する能力を育成することにあると述べた。第3節では、証明観に着目することが証明指導の改善に対して役立つ理由を、宮崎(1996)の見解から述べた。本研究における証明観については、Hersh,R. (1993)や Hanna,G. (1995)の言明を参考に「証明とは必ずしも命題が真であることのみを示すものではない」と捉え、それをもとにして「望ましくない証明観」を次のように規定した。「証明とは 教師に与えられた既に真であることが明らかな命題を裏付け、確かめることであり、その過程で用いる事柄の真偽は必ずしも確認しなくてもよく、また帰納的に行ってもよいものである。」

【第2章】第1節では、「不等式の証明」で用

いられる大小関係の基本性質をまとめ、また不等式指導のねらいが、代数的思考の内容を豊富にすることや応用数学の基礎づくりにあることを述べた。次に第2節において、不等式の証明問題に取り組む際に用いられる方法の分類と、現在、高等学校で使用されている代表的な教科書において扱われている問題の提示方法の分類を行い、そこから、表面的な証明を作り出してしまう場面と「～を証明せよ」という問題提示の場面においては望ましくない証明観がはたらかやすいと推定した。

【第3章】第1節では、まず証明観の改善を段階的に行うために証明観の枠組みを設定した。そこでは、はじめに証明観を形作る要因として次の3つの観点をを用いた。

A：命題の真偽に対する捉え方

B：証明の基にするもの（根拠）

C：証明の進め方（構成）、述べ方（方法）

ここで、A、B、Cのそれぞれについて、望ましくないとされる方を A_1, B_1, C_1 、望ましいとされる方を A_2, B_2, C_2 とし、これら6つを組み合わせることによって、生徒の証明観を捉えることにした。なお、本研究においては、命題の真偽に対する捉え方を重視するために、次のように分類した。

状態 I	(A_1, B_1, C_1)
状態 II	$(A_1, B_1, C_2)(A_1, B_2, C_1)(A_1, B_2, C_2)$
状態 III	$(A_2, B_1, C_1)(A_2, B_1, C_2)(A_2, B_2, C_1)$
状態 IV	(A_2, B_2, C_2)

表1 証明観の段階分け

そして、不等式の証明における証明観と証明活動との関係を調べるために質問紙調査及び面接調査を行った。

第2節では、調査結果をもとに、生徒のもつ証明観を状態Iから状態IVへと段階的に改善するための具体的な条件を抽出した。ここで状態Iから状態IIへの移行は、先行研究で具体的な考察が見られることから、その他2つの移行について述べた。結果は以下の通りである。

状態IIから状態IIIへの移行のためには、与えられた命題に対して、その命題の真偽に対する捉え方を改善することが必要であり、これに

関しては、必要十分な情報を含んだ問題を与え、「～を証明せよ」という提示方法で与えるような形式ばかりを扱うのではなく、「判断して下さい」という語尾によって生徒の活動の幅を広げる問題を用いることが有効である。

状態IIIから状態IVに移行するためには、命題の真偽に対する捉え方の適切な知識は持っているが、それが証明活動に反映されていない状態を改善することが必要である。このためには、命題成立に必要な条件を捉えることのできるような生徒自身が証明すべき命題を構成する活動が有効であると考察した。

4. 今後の課題

第1に、証明観に関する改善は、よりよい証明活動のための必要条件にはなるが、十分条件にはなりえない。従って、今後さらに不等式の証明活動における改善を図っていくためには、生徒が有するその他の困難について検討していくことが必要である。第2に、本論文では、生徒の望ましくない証明観を助長する原因の対処について、問題の提示方法の面から考察したが、改善方法としては学習環境などそれとは異なる側面からの考察も必要である。第3に、本研究で得られた結果をもとに「不等式の証明」の具体的な指導の構想を立て、実際の指導現場でどのような効果が得られるのかを確かめるために、実践していくことが必要である。

5. 主要引用・参考文献

- 国宗進 (1997). 確かな理解をめざした文字式の学習指導, 明治図書.
- 杉山吉茂 (1986). 公理的方法に基づく算数・数学の指導, 東洋館.
- 宮崎樹夫 (1996). 学校数学における証明指導の真理観に関する研究 -我が国の中学校数学の証明指導によって育成され得るものに焦点をあてて-, 第29回数学教育論文発表会論文集, 199-204.
- Gila Hanna (1995). Challenges to the importance of proof, For the Learning of Mathematics **15**(3), 42-49.