筑波数学教育研究　第 19 号　2000

研究論文

問題解決行為における数学的な価値判断

Mathematical Value-Judgement in Problem Solving Action

小原豊（Yutaka OHARA）
筑波大学大学院教育学研究科
（Graduate School of Education, University of Tsukuba）

本稿の目的は，生徒の問題解決行為を価値論的な視点から捉える為の基礎的な枠組みを検討し，この視点からみた数学教育上の問題点を提出することである。その為に，まず本研究の拠って立つ数学間，人間観について述べた後，ビショップ(Bishop, A. 1991)らの研究を基に数学的な価値の実現を捉えた上で，これと同様な価値判断を 2 つの事例分析を通して生徒の問題解決行為から措定する。結論として，数学教育上の問題点に(1)価値判断の潜在性，(2)価値判断の間主観的なずれという 2 点を指摘し，同時にその解決を図る方法論を展望する。

The purpose of this paper is two fold: 1) to discuss basic framework for capturing problem solving action form an axiological viewpoint, and 2) to point out controversial points in mathematical education. For this purpose, I begin with discussing the manifestation of a perspective on human and mathematics, then classify mathematical values according to Bishop, A. (1991). Taking "point at infinity" in projective geometry as an example, I discuss an actualization of values in mathematical development and explore the validity to capture the value-judgment in students problem-solving action as well. From what has been discussed above, I have proposed two problematic issues: (1) Latency of value-judgment, and (2) Intersubjective divergence of value judgment. I also address a perspective to deal with such issues.

キーワード：数学的な価値，措定，価値判断

１．はじめに

数学には，存在論的にも認識論的にも様々な捉え方がある。例えば，絶対主義(absolutism)に立てば，数学は人間を離れて先験的に存在する静的な事実の永続的，客観的な集合体と捉えられる。これに対して，相対主義(relativism)に立ち，かつ可謬主義(fallibilism)あるいは構成主義(constructivism)に立てば，数学は人間が諸々の価値を実現する上で目的的に構成する対象と捉えられる。今日，数学教育を単に効率よく数学的事実を享受する営みとしてではなく，その事実を創りあげる着想や価値などをも指導内容として捉えている我々にとっては，この後者の相対主義的な数学観を採る必要があろう。我々の役割は，生徒が自らの行為に潜む知的な一般原理や法則を数学的な対象として反省する為の支援者といえる。そしてその支援の前提として，我々は生徒の諸行為に指針を与える価値を認識せねばならない。このような背景の元に，本稿では生徒の問題解決行為を価値論的な視点から捉える為の基礎的な枠組みを検討し，価値論的な視点からみた数学教育上の問題点の提出を目的として議論を進める。

２．人間の行為と価値判断

人間は様々な社会的規範に拘束されつつも，本来的によりよきもの(正の価値の実現)を目指して行為する。まず，これが人間を理解する上での基本的な公理となる。価値は人間の行為を導き，規範は人間の当為(成すべし(ought))を導く[1)]。つまり，行為は価値，規範に方向づけられて決定する。これが，19 世紀後半から哲学の１つの流れになっている価値論(Axiologie, Timologie)で規定されている人間の根本的な存在様式といえよう(黒田 1992)。自然的存在であると同時に社会的存在でもある人間は様々な規

範に従いつつ，各々の個性に応じた価値の実現を目指して生きている。言い換えれば，価値と規範は人間の行為を解釈する上で根本的な視点となる。本稿においてはその前者である価値に焦点を当てていく。

価値については，真(理論的価値)，善(道徳的価値)，美(感性的価値)の 3 点がその大枠とされることが多いが，いずれの価値を扱う場合でも人間の認識との関わりから論じるとき，我々は自らの判断を事実に関するものと価値に関するものの 2 つの系列に峻別する必要が生じる[2)]。例えば「自然数は乗法について閉じている」とは事実に関して判断している。また「除法についても閉じるように自然数を拡張したい」とは価値に関して判断している。このような「～したい(wish …)」「～がよい(better than …)」「～するべきだ(ought …)」などと表現される判断をここでは価値判断とし，「～である(is …)」と表現される判断を事実判断とする。通常，我々の思考や推論のプロセスでは両者が混在して現れる。例えば，「なぜ数を拡張したいのか」と問えば，数の広がりによって説明できる合理的な世界が広がるからであり，このなぜ(why)を繰り返せば，事実あるいは価値に関する判断の系列が生じる。「自然数は除法について閉じていない」という事実から，「自然数を拡張する」という行為が直接的に決定されるのではない。その間には「量を精確に測りたい」「数を演算について閉じるようにしたい」あるいは「代数方程式を完全に解きたい」などの意志と，それを支えるものとして，例外を排除し完全性を求めようとする価値判断が介在している。

３．数学的な価値

3.1　数学的な価値の分類

第 1 節で述べた相対主義的な数学観に立ち，かつ第 2 節で述べた価値論で規定する人間観に立つとき，我々は数学を客観的対象として没価値的に構成することはできない。無数の対象から思惟的整序を記述し，構成するに値するものを選定する為には価値判断が必要になる。では，具体的に数学を構成する際に実現される価値とはいかなるものであろうか。我が国においては，例えば中島健三(1981)は，数学の創造を促した価値観を認識し，その多様化を図ることは，数学教育における人間性の育成への貢献に重要な意義をもつことを指摘している。そして，どのような方向に探究することが改善なのかを示す価値観として，Mathematics Teacher (1958, Feb.) から To clarify, To simplify , To unify, To broaden old ideas , To intoroduce important new ideas を引用しており，特にそのなかでも前の 3 つを簡潔，明確，統合として挙げて以下のように整理している[3)]。

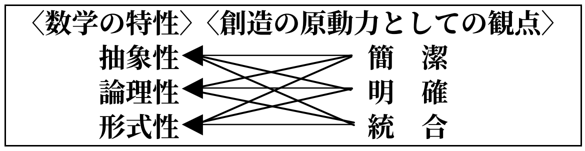

図-1　数学の特性と価値観の対応（中島,1981）

また諸外国においては，例えばユネスコの報告書 New Trends in Mathematics Teaching (1979) において，数学的な創造に関する価値観として Intellegibility (人によくわかること)，Brevity (簡潔であること)，Accuracy (正確であること)，Relevance(適切であること)，Normality (正常であること)の５つが挙げられている。また数学を含めた自然科学の分野では，例えばマローネ(Malone, T. W.1981)は，人間が知識に対して抱いている一般的な期待を Completness (完全性)，Consistency (一貫性)，Parsimony (簡潔性)の 3 つに整理している。また比較的近年では，ビショップ(Bishop，A. 1991)は，数学特に西洋数学の有する数学的な価値を，混乱や葛藤に清浄さ(purity)や精確さ(percision)，正確さ(accuracy)，あるいは必然性(inevitability)などを与えて理路整然とした説明を可能にする Rationalism (合理主義)，また記号などによって現実から抽象化し対象化する Objectism (客観主義)，現象を記述することで覚える感覚としての Control (統制)，適用する状況を広げてより一般性を確保する Progress (進歩)，命題の真偽の検証などへの取り組みを誰にも可能にする Openness (開示性)，

そして未知なる関係の探究や着想の発生元についての Mystery (神秘性)という 6 つの群に整理している。

また，このような根底的な価値は，価値判断の最低限の骨子ともいうべきものであり，上で列挙したような一言で表現できる価値として要約，還元してしまうとかえって理解しにくくなる価値もあろう。例えばギリシア的価値というものを考えてみる。伊東俊太郎(1981)は，“世界は自然数の数的規定によって成り立っている”というギリシア的な世界観の下では，「無限なもの」は秩序づけられず，追究しえる価値を有さなかったと述べている。これは，ギリシア的な価値の下においては，無限というものを積極的に対象化せず，無限を彼らの認識の中に価値あるものとして取り入れる対自化をしえなかったことを意味する。つまり，あるコミュニティで共有されている価値はその世界観に支えられて複合化しており，上述の骨子のような価値に還元すること自体が必ずしも生産的ではない場合も考えられる。

3.2 理想的要素の導入にみる数学的な価値の実現

それでは，実際に数学的な価値の実現はいかに為されているだろうか。ハーディ(Hardy, G. H.)やアダマール(Hadamard, J.),あるいはポアンカレ(Poincare, H.)らの優れた数学者による内観報告的な自伝を窺えば，彼らの諸行為が調和や秩序，優美などの数学的な価値の実現であることは確認できる。ここでは更に，その傾向が顕著に現れると推測される数学の発展において価値実現の在り方をみる。以下では射影幾何における「無限遠点」の導入を例に取る。更に，いずれの 3 つも同一点で交わらない任意の 4 直線とそれらの 6 つの交点から成る完全 4 辺形に関する簡潔な定理を例にとる(Courant,R.& Robbins, H.1941/1966)。下図で 4 直線は AE, BE，BI，AF であり，A と B，E と G，I と F を通る直線は 4 辺形の対角線である。ここで任意の対角線(下図では AB)に他の２つの対角線が交わる点(下図では C，D)を記す。直線 AD 上でこの方向を正とし，また A〜D の各座標を x_1〜x_4 とする。

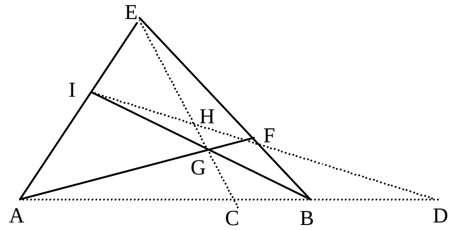

図-2　完全四辺形

このとき，反対の方向に測った長さを負と考えれば，中心射影による複比は不変で，

$$\frac{CA}{CB} \Big/ \frac{DA}{DB} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_4} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1} = -1$$

即ち 1 本の対角線と他の 2 本の対角線との交点はその対角線上の頂点を調和に分けている。しかし，もし IF が AB に平行な場合なら，第 4 調和点 D は存在できなくなる。つまり，中心 O からの射影と平行射影を区別する必要が生じる。しかし，この区別は議論を煩雑にするので，例外を排除し簡潔性，整合性という価値の実現を図ろうとする。それ故に「2 直線は常に交わる」という命題を成立させる為に，平行線が相交わる場所として理想的な点である「無限遠点」を導入する。これによって前述した複比の不変性について例外の排除に成功することになる。

これと同様に，例えば数概念においても自然数から整数, 有理数, 実数, 複素数, 4(多)元数, イデアルと漸次進展して従前の数と同等な実在性を認められていく進展に価値実現の典型を見ることができる。このように，数学においては事態をより簡潔にし，理論をよりきれいなものにする為に便宜的に，その時点では架空の存在を理想的要素(ideal element)として導入する。そして，これを置くに至った先達の内面には紛れもなく“例外を排除しようとする精神”や“世界をより広く理解しようとする精神”があり，その精神に簡潔性，完全性といった価値の実現をみることができる。また無論，この架空の存在はそれを操作的に扱い得る世界を得ることで次第に数学的実在としての地位を獲得する。この人間のもつ単純を愛する傾向や例外を排除しようとする傾向は数学的な手法の 1 つとして捉

えられる。赤摂也(1974)は，この数学的な手法が更に，科学的思惟の対象となりうるもの全てを数学の対象として捉える為の方法論としての公理主義的方法に発展したと位置づけている。

４．　問題解決行為における数学的な価値判断

4.1　価値判断の介在

前節 3.2 で述べたように，数学の史的発展にみられるプロセスにおいては価値判断は比較的措定し易いと思われる[4)]。例えば，乗法の意味を拡張する場合，既知の整数の範囲で用いてきた形式を新たに学んだ小数を含めた世界にも持ち込みたいという意図には，形式の統一を図るべきだとする価値判断がそこに介在する。また整数を有理数に拡張する場合，単純さを求め常に除法が可能になるように例外を排除したいという意図には，有理数という概念を理想的要素(ideal element)として持ち込みたいという価値判断がそこに介在する。無論，子どもが実際にそのように判断してくれているか否かは確認せねばならないが，少なくともそこに在って欲しい価値判断を踏まえた上で教育的な議論を進めることができる。それでは，数学の創造，発展というまでの段階には直接関わらない局所的な問題解決では，その行為において価値判断はいかに介在しているのであろうか。以下２つの事例からその措定を試みる。

事例１．「3 つの自然数があり，そのいずれの 2 つの積も第 3 の数で割れば余りは 1 となる。この 3 つの数を求めよ」

この問題に，ある生徒が以下のように取り組んだとする。

解）3 つの数を a,b,c(a≦b≦c)とおく。bc－1 は a で,ac－1 は b で，ab－1 は c で割り切れる。

⇒(bc－1)(ac－1)(ab－1) は abc で割り切れる。

⇒bc＋ac＋ab－1 は abc で割り切れる。～ (i)

ところで,bc＋ac＋ab－1≧abc　　～ (ii)

(∵a,b,c∈N より，

bc＋ac＋ab－1∈N，abc∈N)

また，a≦b≦c より，

3ab≦bc＋ca＋ab≦3bc

abc≦bc＋ca＋ab－1

≦3bc－1＜3bc,

⇒a≦2 となる。題意から a≠1 より，a＝2

⇒2c＋2b－1 が bc で割り切れる

同様に，2c＋2b－1≧bc,

4b≦2c＋2b≦4c,より

bc≦2c＋2b－1≦4c－1＜4c

⇒b≦3 となる。題意から b≠1，また，

2c－2b－1 は 2 で割り切れない。∴b＝3

ここから，ab－1＝2×3－1＝5 が c で割り切れることから，c＝5.

以上より，(a,b,c)＝(2,3,5)

解法では, まず問題を代数的に表現している。これは，数学的に取り扱い易いようにするという意図から生じる行為であり，ここからランダムに数値を代入するのではなく思考の経済を図り，的確さを求めようとする価値判断を措定できる。次に，「bc－1 は a で，ac－1 は b で，ab－1 は c で割り切れる」という 3 つの事柄を「単純な 1 つの関係で表したい」という意図から「(bc－1)(ac－1)(ab－1) は abc で割り切れる」と置き換えている。ここには煩雑で冗長な命題表記を避け，簡潔さを求める価値判断を措定できる。結果として問題は「bc＋ac＋ab－1 が abc で割り切れるとき，自然数 a,b,c を求める」という問題に翻訳(同値な命題に置換)される。さて，上述の解法で生徒が「命題(i)は，この問題の必要条件であるが，十分条件でもあるだろうか」ともし考えたとする[5)]。「この条件が必要十分なものかどうか検討した方がよい」という判断にどのような価値判断が含まれているか。ここで価値を，対象に本性的に内在する存在的な価値(worth，aesthentic value)と，相対的に付随する機能的な価値(value)に区別して，この前者を目的価値あるいは自体的(intrinsic)な価値と呼び, 後者を手段価値と呼ぶとする。すると，前述の「・・・検討した方がよい」の“よい”は手段的な価値を意味しているとも考え得る。そこで目的価値に言及する語句を補うと「この同値な命題への置き換えが的確である(目的価値)には, 条件が必要十分かどうか検討した方が

よい」という２つの価値判断として捉えられる。

また次の例は，茨城県下の私立高校 2 年生 MK，SY の 2 名(共に男子)を被験者とした問題解決過程の分析調査の一部である(小原 1999)。

事例２.「$x^2+y^2-2x-2y+2=0$　を満たす実数 x，y の値を求めよ」

解決は以下のように進行した。まず x と y を別々に平方完成することに気づいて変形した後，実数 x，y の値を求めるのが目標であることを確認した。そして変形した式の意味について以下のような発話を交わした。

SY；	これ円とかなんねえの？成んないか。
MK；	イコール０だから，半径なくなっちゃう。
SY；	点じゃん。ははは。
MK；	点になっている。ちょっと待っ，なら中心がどことか関係ねえ。
SY；	実は(1, 1)の点になっちゃう。
MK；	いいじゃんこれで。

発話にみられるように“点は半径 0 の円であるのか”という話題が上がっても，“与えられた問題を解く”という当面の目的に関連づけられない為にすぐ棄却されており，その後考察の対象とされていない。無論これは状況設定にも問題があることだが，彼らにとって先ずもって“与えられた問題を解くこと(求答)”自体が優先されており，円や点の定義を厳密にしていくこと，あるいは無矛盾にしていくことは検討される価値を有さなかったことが示されている。

4.2　2 つの教育的な問題点

本項では上述の 2 つの事例での考察を受けて 2 つの教育的な問題点を提出する。

4.2.1　価値判断の潜在性［問題点 1］

第 1 は，価値判断が顕在的(Overt)か潜在的(Covert)かという価値判断の潜在性の問題である。事例 1 において，例えば“必要十分条件の検討”などの背後にある，自らの価値判断に対して生徒はどの程度自覚的であったのだろうか。またどの程度自覚的であることが望まれるのか。例えば，以下のような古典的な形式論理学に基づく 3 段論法の例を考える。まず事実判断に関して，以下が考えられる。

大前提；実数は加法について閉じている
小前提；a，b は実数である
帰　結；a＋b は実数である

そして，この論法を成立させる大前提は事実に関する全称命題である必要はなく，価値に関するものであってもよい。例えば，整数を有理数に拡張しようという判断は下記の価値判断を前提としてもつ。

大前提；数を演算について閉じたい。
小前提；整数は除法について閉じていない。
帰　結；除法について閉じる数(有理数)を理想的要素として持ち込みたい。

この大前提となる事柄は，通常は認識されにくい。カルナップ(Carnap,R.)によれば，価値言明，即ち命題として記述した価値判断は，無条件価値言明(unconditional value statement)と条件価値言明(conditional value statement)に区別される。これに倣えば，例えば「自然数を有理数に拡張したい」というのは無条件価値判断である。これに対して，「除法について閉じたいから，自然数は有理数に拡張したい」という判断は，“もし演算を常に例外なく行いたいと願うなら”という条件を含めた条件価値判断である。

数学教育の見地から見れば，この価値判断の条件節 If の部分(大前提)を行為に埋もれさせておかず，適宜生徒が認識できるように支援せねばならないと考える。数学の記述を〈If A, then B〉の形式で捉えるとき，生徒の理解において then B が突出し，if A が不明確になっていることは既に問題点として多くの研究者に指摘されている(礒田,1996, 清水 1998, Vinner, S. 1997)[6)]。もし数学を，それを創り出し使用する人間の価値が負荷されているものと見なし，その価値を認識すること自体をも教育的内容と捉えるならば，この条件節 if の部分が価値判断の場合でも同様だと考えうる。

4.2.1　価値判断の間主観的なずれ［問題点 2］

第 2 は，生徒の主観的な価値と，数学の使い手，作り手の集団における複数主観の合意による間主観性な価値のずれの問題である。価値に関する問題は近年，数学が価値負荷的(value

-laden)であり，各文化に拘束されることを強調する社会構成主義の立場から再考されている。例えば，アーネスト(Ernest, P. 1998)は，数学が中立的ではなく社会文化的な脈絡に埋め込まれていて，その作り手(maker)の価値が負荷されており，数学の使い手(user)も創り手(creator)も数学が社会や自然界にもたらす影響について責任をとらねばならないことを主張し，学校数学はこの特徴を反映すべきであると主張している。この社会的構成主義の見解に従えば，上で概略したような数学的な価値とは，数学の使い手や作り手の集団における複数主観の合意，即ち価値判断の間主観性(intersubjectivity)に支えられている。平たく言えば，その集団の構成員らが共有している望ましさ(desire)が上述の諸価値となっている。例えば，数学では無矛盾性を追究し，例外を排除していくことは間主観的に成り立つ価値であり，社会数学的な規範として協定される。そして，前述の事例２にみられるように，この両者は必ずしも一意するとは限らない。正木孝昌(1997)は，ある人間が(文化遺産として伝承すべき数学的なアイデアがもつ)客観的な価値を感得し，使うことができるように成るためには，その価値を包む，一連の状況をそのひとりの人間が自分の働きかけ得る世界として認めなくてならないと主張し，初等教育の立場から，数学の客観的な価値(本稿でいう間主観的な価値)と，個人を対象に引きつけている個人的な価値との混同に警鐘を鳴らしている。これは，中等教育以上においても全く同様であると思える。先の例題 2 について MK と SY は，解(x, y)＝(1, 1)を導く過程で今まで曖昧にしていた円あるいは点の定義を振り返る機会を得たが，実際には問題の解決を優先して，「点は半径が限りなく 0 に近づいた場合の円なのか」という疑問を留保している。この時点では，曖昧なものを許さない厳密性や無矛盾性は彼らにとっての価値にはなり得なかったのである。これは「この問題解決を通して狙った教育内容ではない」として看過すべきことではない。根底的に，価値認識の相対性を認めた上で成立する教育的な支援とは何か，数学的な価値がいかに合理的に在立しているかをどのように指導すべきか，という根深い問題が潜んでいる。

4.3　方法論の展望

筆者は，生徒の数学的な諸行為から事実(facts)だけでなく，着想(idea)をも措定すべきだと指摘し，その枠組みを思案してきた(小原 1998,1999)。そもそも数学的な着想とは，端的に言えば，問題を解決する際に何らかの困難に直面したとき，その打開に必要な観点の変更や場面の再構成の際に機能するものとみられる。そして，問題解決が即ち簡潔，明確などの数学的な価値の実現に向けての合目的的な行為であることを踏まえれば，生徒の諸行為から彼らの着想を措定する際には同時に，その根底にある価値判断を捉える必要がある。それでは実際に，生徒がその行為においてもつ価値判断をどのように捉えたらよいのか。上述の問題点 1，2 の解決に向けて，生徒の行為から価値判断を顕在化して教室での公的な議論の対象とし，間主観的なずれを埋める為には，以下の 2 つが有効であると考えられる。第 1 に，価値が行為者の志向性に反映することを手掛かりにすることである。我々はある目的をもち，その目的にかなう手段を提供するものに対して「よい」という承認を示す。つまり，生徒が問題解決の各相においていかなる目的をもっているかを臨床的なインタビューによって捉えていくことが彼らの価値判断を顕在化する為に必要であろう。第 2 に，価値は行為者の選択に反映することを手掛かりにすることである。無数にある選択肢からある特定の解法を選び意志決定する際には，必然的に価値判断が働いている。これは統計的決定理論やオペレーションズリサーチなどにもみられる発想だが，つまり生徒がとりうる限りの選択肢を想定し，そのどれを採るかを確かめることが生徒の価値判断の顕在化に有効と考えられよう。また例えば Iida, S. (1993)は，現実世界のオープンエンドな問題を社会文化的な文脈で解決する際には価値や倫理の問題が介在し，状況的な価値負荷や意志決定が要求されることに着目した上で，生徒による数学の人間的側面の認識を強調している。アーネスト(Ernest, P)にも

通じるこの着想を，日常性の強い社会文化的な文脈の問題のみではなく，数学の史的展開を社会文化的な文脈とみる方向で活かし，生徒の価値判断を顕在化する為に用いるべきと思われる。

５．おわりに

本稿の目的は，生徒の問題解決行為を，価値論的な視点から捉え，かつその視点からみた数学教育上の問題点を提出することであった。ピアジェ(Piaget, J.)は人間機械論を批判する上で「あらゆる人間科学が価値の分類の探究に至るのは明らかである」と述べ，人間行為とそれを支える価値の分析を示唆している。数学教育を営む我々は生徒の数学的な諸行為を，事実判断と価値判断という少なくとも 2 つの視点で分析すべきではなかろうか。特に行為を支えている価値判断の措定は，生徒が自らの行為を決定するときに用いている合理的な機構を反省することの第 1 歩となる。これは，単一の価値への固執などからくる問題解決の失敗などを回避できる可能性を生むし，また自らの行為を促していた数学的な価値判断を反省すること自体に数学教育における意義が認められよう。今後は，数学の各領域別において特有な価値の整理や，行為における潜在的な価値判断を顕在化する条件の具体化に取り組んでいくことが課題となる。

註記

1) 本稿では，価値とは欲求を満足する性質を意味する。また価値認識とは，価値判断の総体とし，また価値観とは「対象を評価または志向する際，主体の判断を支える基準，枠組みであり，文化的背景をも含めた経験や学習に基づいて，ある一貫性を保って形成されてきた認知の基盤」を指す［盛岡清美,塩原勉,本間忠敬(編). 新社会学辞典，有斐閣.］

このように構えていえば，哲学あるいは社会学の鍵概念の 1 つであるが，平たく理解しようとすれば，価値とは「よい」ものをよいたらしめている「よさ」のことでもある。我が国の先達が理論と実践の両面から追究してきた数学のもつ「よさ」の種類と構造は今後追究したい。

2) 万人に共通という意味での「事実」ではない。事実は観察者が負荷する理論（解釈体系）によって異なり，互いに共約不可能な 2 つ以上の解釈体系が共存する。またこの “ 事実 ” という語を広義に用いた場合，例えば『「価値は事実ではない」ということは事実だ』という言明のような異なる次元の事実の語用を許すことになる。確かに，我々は事実を根拠として価値を認識するし，また何らかの価値を生み出すからこそ事実を追究するとも考えられる。しかし，これでは次元の異なる議論を引き起こす。本稿では，価値判断と事実判断の間に本質的な相違はないとする自然主義(naturalizm)を退け，事実と価値は互いに一方から他方を導出しない直覚主義(intuitionism)の立場に立つ。

3) また中島は上記の簡潔，明確，統合を主観点とした枠組みの中に，昭和 26 年の中学校，高等学校の学習指導要領の中で各内容の長所に用いられている諸観点を取り入れて整理している。

① 簡潔　～　表現，作業，思考の上で簡単であることを含む
  a. 能率がよい（精神的，肉体的 な労力を節約できる）
  b. 形式的（意味をいちいち考えずに形式についての直観や操作で済ませる）
  c. 機械的（b とほぼ同様）
  d. 手軽な，易しいなど

② 明確　～　論理的に正しく，明らかになること，出来るだけ本質的な少数の事実に帰着する。
  a. 的確（目的にあって確かなこと）
  b. 正確

③ 統合　～　よく整理され，関連とまとまりのあること
  a. 一般化，拡張
  b. 形式の統一（形式の単一化）
  c. 完全化（欠点や例外をなくす）

4) 措定(setzen)とは，哲学用語であり，あるものを対象としてまたは存在するものとして立ちあげる（在立する）こと，ある内容を明確にとりだして，仮定として肯定的に主張することを指す。

5) bc＋ca＋ab－1 が abc で割り切れるなら，無論 a でも割り切れる。すると，bc＋ca＋ab－1=a(c＋

b)＋(bc－1)であり，bc－1 が a で割り切れることになる。同様に ac－1 が b で, ab－1 は c で割り切れる。即ち十分条件でもある。

6) 例えば礒田は，手続き「～ならば‥‥である」における状況判断「～ならば」を意識する為には，その手続きが成り立たない場合を経験せねばならないことを指摘している。

［礒田正美（1996). 多様な考えを生み練り合う問題解決授業, 明治図書, 7-35. ］

また清水は， then B が突出し If A が不明確になることに以下の３つの問題点を指摘している。

①理解が皮相的で不十分なものになること

②活用を困難にしたり，誤用させたりすること

③発展的考察の契機を逃してしまっていること

［清水静海（1998). 子どもの問題解決を支援する算数授業, 明治図書, 82-84. ］

参考・引用文献

Bishop, A. (1991).Mathematical values in the teaching process. In Bishop, A. (ed.), Mathematical Knowledge: its Growth through Teaching (pp. 194-214), Kruwer Academic Publishers.

Carnap, R. (1952). Meaning and Necessity. ［永井成男(訳). 意味と必然性, 紀伊國屋書店, 1974.］

Courant, R. & Robbins, H. (1941). What is mathematics? - an elementary approach to ideas and methods -, Oxford university press. ［森口繁(監訳). 数学とは何か, 岩波書店, 1966.］

Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics, Its role and its influence. In D. A. Grouws(Ed). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning(pp. 39-48), NCTM. Macmillan.

Ernest, P. (1998). Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, State University of New York Press.

Hadamard, J. (1945). An essey on the psychology of invention in the mathematical field, Princeton University Press. ［伏見康治, 尾崎辰之助, 大塚益比古(訳). 数学における発明の心理, みすず書房, 1990.］

Hardy, G. H. (1967). A mathematicians apology, Cambridge University Press. ［柳生孝昭(訳). 一数学者の弁明, みすず書房, 1975.］

Iida, S. (1993). Value-laden, context-bounded and open-ended problem solving in mathematical education. Proceeding of Psychology of Mathematics Education. **XVII**, 17-24.

Malone, T. W. (1981). Toward a theory of intrinsically motivating instruction, Cognitive Science.

Piaget. J. (1970). General problems of interdisciplinary research and common mechanism, UNESCO, Place de Fontenoy. ［芳賀純, 佐藤功, 佐藤喜美子(訳). 現代科学論. 福村出版.］

Poincere, H. (1941). Science et methode, Paris, Hammarion. ［吉田洋一(訳). 科学と方法.創元社, 1950.］

Unesco. (1979). New trends in mathematics teaching. ［数学教育新動向研究会(訳). 世界の数学教育, 共立出版, 1980.］

Vinner, S. (1997). From intuition to inhibition -mathematics, education and other endangered species, Proceeding of Psychology of Mathematics Education, **XXI**, 63-78.

秋月康夫（1968). 数学的な考え, 明治図書出版.

伊東俊太郎（1981). 数学における無限と有限, 科学と現実, 中公業書.

小原豊（1999). 「行為における定理」の捉え方の特徴づけに関する考察 ―大学院生と熟練教師が生徒の解法の予測に用いる枠組みの比較, 第 32 回数学教育論文発表会論文集, 337-342.

黒田亘（1992). 行為と規範. 勁草書房.

赤摂也（1974). 数学の本質と思考の特質, 中島健三, 大野清四郎編. 数学と思考, 第１法規.

永井成男（1985). 認識と価値, 早稲田大学出版.

中島健三（1981). 算数・数学教育と数学的な考え方 ―その進展のための考察, 金子書房.

正木孝昌, 坪田耕三, 細水保宏, 田中博史, 夏坂哲志著（1997). 算数科・学ぶ価値を見出し追求する活動, 明治図書.

三田宗介（1966). 価値意識の理論, 弘文社.