

数学的な発見における図的表記の役割について ～平面幾何において用いる図的表記の一般性に焦点をあてて～

野口 和久

1. 研究の意図・目的

数学における図的表記の利用は有効なものであると捉えやすいが、教育的な視点から見た場合、必ずしも有効なことばかりではないということが先行研究において指摘されている。例えば、生徒が個物である図的表記を一般的なものとして受け入れてしまう場合がある。このような問題を解決するために、生徒自ら図的表記を描き、様々な場合を探りながら数学的な性質を発見していく、という経験を積むことが必要であると考える。

そこで、本研究では、数学的な発見の過程において図的表記がいかなる役割をもつのかを考察し、その過程で図的表記から捉えられる数学的な性質についての認識がどのように深まっていくのかを検討することを目的とする。

2. 論文構成

序章 本研究の意図・目的・方法

第1節 研究の意図

第2節 研究の目的と方法

第3節 論文の構成

第1章 数学的な発見

第1節 数学的な発見についての先行研究の考察

1-1-1 発見の意味

1-1-2 数学における発見

第2節 平面幾何における発見

1-2-1 発見の困難性

1-2-2 平面幾何における発見の型

第2章 図的表記の特殊性と一般性

第1節 図的表記による活動の制約

2-1-1 図的表記の意味と分類

2-1-2 図的表記を読むことの困難性

第2節 図的表記の一般性についての先行研究の成果と限界

2-2-1 特殊性と一般性

2-2-2 図的表記の一般性に関する先行研究

第3節 特殊性を意識した一般性

2-3-1 一般性と特殊性の関係

2-3-2 図的表記の一般性

第3章 数学的な発見における図的表記の役割

第1節 推測の過程における図的表記と命題の関係

3-1-1 命題の記述方法

3-1-2 推測の過程

3-1-3 推測の過程における図的表記と命題の関係

第2節 発見の過程における図的表記と命題の関係

3-2-1 証明の過程における図的表記と命題の関係

3-2-2 発見の過程における推測と証明の関係

第3節 数学的な発見の具体例についての考察

3-3-1 数学的な発見の具体例

3-3-2 数学的な発見における一般と特殊の関係

終章 本研究のまとめと今後の課題

第1節 研究のまとめ

第2節 今後の課題

3. 論文の概要

【第1章】

発見の意味について、発見とは必ずしも元々あるものを見つけるだけであるとする非創造的なものではなく、創造的な活動となりうることを述べた。そして、ポリア(Polya, G. 1954)の研究をもとに、教科書等では軽視されがちである発見の過程における推測の過程の教育的な重要性を指摘した。そして、推測をするための準備

段階として試行錯誤が必要であり、そのときに図的表記が有効に働くことをアダマールの見解をもとに指摘した。その上で、本研究で扱う平面幾何における発見の特徴について、清宮俊雄(1966)の研究をもとに考察し、そこに図的表記、一般・特殊の考えが関係していることを指摘した。そして、実際の発見の過程においてはこれらがそれぞれ単独に現れるのではなく、様々に組み合わせられて行われることを推測した。

【第2章】

図的表記を読み取る際の問題点について、島田和昭(1986)らの研究を基に考察し、同じ図的表記から解釈によって異なる性質が引き出せるために、教育的に見て生徒がそこで思考すべき対象に必ずしも着目していない場合が生じ得ることを指摘した。ついで、その問題点を克服するための手がかりとして、図的表記の有する一般性に着目した。まず、一般性には2つの意味があることを指摘した。そして、島田(1986)らの研究の図的表記の一般性の意味は2つの一般性のうちの1つであることを述べた。もう1つの一般性の意味を捉えるために、ポリアの述べる3つの special case を基に、特殊な場合を考えることが、より一般的な数学的事実を発見する際にいかに機能するのかを正弦定理の事例において内観的に考察し、「一般・特殊の相対性」という視点から、図的表記の一般性の意味を示した。

【第3章】

推測の過程及び証明の過程と命題の関係について考察し、それを基に、推測の過程、証明の過程における生徒の状態を以下のように3つに分類した。

状態 : ある命題を言語, 記号, 図的表記によって捉えている状態

状態 : ある命題を記号, 図的表記によって捉えている状態

状態 : ある命題を図的表記によって捉えている状態

そして、これをもとに筆者が行った発見の過程の内観報告を分析し、推測と証明がどのように現れているか、図的表記に対する認識がどう

変化するか調べた。その結果から、自分の描いた図的表記と図的表記、あるいは図的表記と命題との関係を考えることが、図的表記の一般・特殊の認識に必要であると考えられ、その為の方法として発見の過程が1つの有効な手段であると考察し、発見の過程において図的表記に関する認識がどのように深まっていくかを捉える枠組みを提出した。

4. 今後の課題

第1に、本研究では、筆者が行った発見の過程を内観的に報告したので、実際に生徒らがどのように発見を行うか、実践調査を行い、本研究で構築した枠組みを洗練していく必要がある。第2に、発見を生徒らが行う場合にはその過程において様々な困難が生じることが予想される。したがって、各状態の生徒らに対して、どのような支援をすればよいか、今後検討していく必要がある。

5. 主要参考・引用文献

島田和昭 (1986). 数学教育における視覚的補助の一考察 図的表記を中心にして, 教育学研究集録 5, 117-122.

清宮俊雄 (1966). 初等幾何学における発見的研究法について, 日本数学教育学会誌論究 13, 16-44.

中原忠男 (1995). 算数, 数学教育における構成的アプローチの研究, 聖文社.

ポリア, G. (1959). 数学における発見はいかになされるか 1 帰納と類比(柴垣和三訳), 丸善. (原著出版 1954).

ポリア, G. (1959). 数学における発見はいかになされるか 2 発見的推論(柴垣和三訳), 丸善. (原著出版 1954).

村上一三 (1992). 平面図形の図的表記の一般性認識について, 第25回数学教育論文発表会論文集, 31-36.