筑波数学教育研究　第 20 号　2001

文字式の指導に関する重要な諸問題 1)

三輪　辰郎
筑波大学名誉教授

文字式は，アルファベットと数字の式，つまり，それらと数学的な印しから成る式のことである。

未知数を表す文字の使用は 3 世紀のディオファンタスに始まった。16 世紀のヴィエタは未知数だけでなく既知の定数をも文字で表し，17 世紀のデカルトが現在の文字式のシステムをほぼ完成した(中村 1962；Kieran 1990, 1992)。数学の長い歴史に比べると，文字式の使用は比較的新しいと言える。文字式の使用によって，一般に数学，中でも，代数学と解析学の進歩は目覚ましく，その物理的科学への応用は現代のテクノロジーと文明の基礎を築いた。

今日文字式の導入は全ての生徒のための中等数学の最も基本的な内容である(文部省 1989, 1999；DES & WO 1989；NCTM 1989, 2000)。多くの教師と生徒は文字式の教授と学習に困難を感じており，多くの研究と会議がそれに焦点を合わせている(大阪数学教育研究会 1987；Algebra Working Group to NCTM 1995；Bednarz 1996；Bell 1995；Coxford 1988；Dossey 1998；Kaput 1995, 1998；Kieran 1990, 1992, 1996；Lacampagne 1995；NCTM & MSEB 1998；Royal Society & JMC Working Group 1995；Steen 1995；Wagner & Kieran 1989a, 1989b)。本講演もこの問題に焦点化する。時間の制約を考えて，この主題の基礎と導入段階の教授に集中することにする。

本講演は次の 2 つの節と終わりの注意から成る。

1　文字式の本性とその使用

これは主題の基礎であり，それに基づいて次節の議論と分析を進める。始めに数学の言語としての文字式の特徴を論じ，次いでその広範な使用とそれが効果的であるところを少数の例を含めて述べる。

2　導入段階の文字式の教授

先ず，導入段階における文字式の教授についての提案を示す。次いで，文字式の教授の中核部分である言語的な面の 3 つの過程と，教授の基礎としての小学校の算術教授の関係を考察する。最後に，教授に大きく影響する因子として，テクノロジーと教師を論ずる。

この講演を準備するのに，私は世界中の数学教育学者と研究者に，その研究論文，論説，記録，著書を通して大きく負うている。その方々は余りにも多く，ここでその名を挙げることはできない。講演の始めに当って，これらの方々全てに心からの謝意を表する。

1　文字式の本性とその使用

(1)文字式の本性と特徴

ア．数学言語としての文字式

数学において，文字式はコミュニケーションと思考の非常に大切で不可欠な手段であって，文字式は数学言語とみなされる。それは次の特徴を持っている(文部省 1989，1999；Sfard 1987, 1991)。

(ア)それは明確で簡潔である。

(イ)それは一般を表すことができる。

(ウ)それは形式的に変形できる。

(エ)それは過程を表し，また，対象として操作される。

(ア)については，文字式は徹底していて冗長さが全くない。文字式は多くの内容と意味を含んでいる。このことは日常言語と較べれば明ら

かである。その理由は，数量とその関係だけに焦点を合わせて表現し，他は無視するからである。例えば，文字式の典型的な例である方程式を使って文章問題を解く際は，問題に含まれるいろいろの名詞，動詞，形容詞や副詞等が無視され，ある数量関係だけに焦点が合わされて方程式を作り，それを解くことによって問題を解決する。さらに，文字式は非常に多くの概念や原理に基づいている結果を表現する。$E = mc^2$ のように，短い形式で深い内容を含む文字式が多くある。

(イ)については，数の式が数量の特定の値を表すのに対して，文字式は一般を表すことができる。実際，文字式を使うことによって我々は個別で特殊を越えた一般を表現する。それ故，文字式は状況で働いている機構や構造を明らかにする能力を持っている。

(ウ)は極めて重要である。文字式が数学での思考の手段である理由がこれであると言うことができる。ときには，変形自身が思考の代わりをしてくれる。さらに，大切であるのは，変形が形式的，つまり，文字の意味や文字式の背景を考慮せずにできることである。

(エ)は上の三つと少し違うが，注意しなくてはならないことである。二次方程式の解の公式がもともと解を求める手続きを示すものであったように，文字式はある過程を表現する。それは，式の形に書くことによって過程を意識することを得させる。同時に，文字式は対象として操作することができる。解の公式での(二次方程式の)解の和を計算するようにである。文字式の過程-所産の二重性の理解は大切である。

イ．文字式の言語的な面

言語の観点から「表されるもの」と「表すもの，文字式」の関係が考えられる。表されるものから表すものへの移行過程が「表す」過程であり，その逆が「読む」過程である。文字式同士の間の移行過程が「変形する」過程である。文字式の使用におけるこの三つの過程の役割は，私が「文字式使用の図式」と名づける三角形状の下の図式で示される(三輪　1996；Miwa 1998, 1999)(図１)。

ある事象から出発し三つの過程を一回りして，この事象で新しい発見をし洞察を得ることが期待される。それ故，出発の事象は終点ともみなされよう。

ウ．数学言語の使用者

言語の使用者に関しては，言語の教育が適切になされないときに文盲が現れることが指摘されるべきである。文字式についての文盲は重大である。それが，数学を使わないこと，したがって，学問的と職業的の両方の将来の進路への扉を閉ざすことにつながるからである。数学に基礎を置くテクノロジー社会を予見するとき，数学教育者にとっての緊急の課題は，この種の文盲を防ぐことである(Dossey 1998；Kaput 1995, 1998； Royal Society & JMC Working Group 1995)。

加えて，言語が文化に深く根ざすこと，その使用者がその文化的背景に強く影響されることに注意するべきである。例えば，周知の学生-教授問題についての生徒の困難は，英語での比の表現とその文字式への翻訳から引き起こされると考えられる(Herscovics 1989；Lockhead &

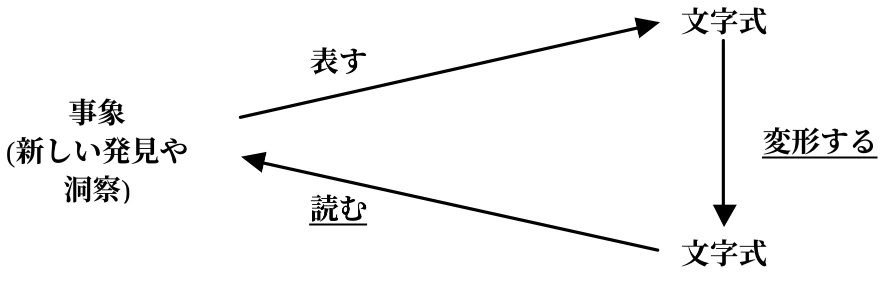

図１　文字式使用の図式

Mestre 1988)。

学生-教授問題は,「変数 S と P を使って次の文を表す方程式を書け。“この大学には教授の 6 倍の学生がいる。学生の数を S,教授の数を P として使うこと。”」という問いである。米国のある州立大学工学系新入生 150 人の正答率は 63%で,誤答の 68%は逆の誤り 6S=P である。

「対象としての文字」という解釈(Küchemann 1981)は,英国の生徒の中に,2a+5b+a をリンゴ 2 つとバナナ 5 つと他のリンゴと解釈するものがいるという例で示されるもので,上の影響の別の例である。この解釈は英語国民以外の生徒には困難であろう。というのは,彼らは a, b が,それぞれリンゴ apple とバナナ banana の略記であることを知らず,そう解釈できないからである。

(2)文字式の使用

ア．文字式の広範な使用

文字式は中等数学及びそれより上の数学の殆ど全ての系統で使われる。実際,それは,代数,初等関数と解析学,解析幾何,線形代数,有限数学,確率と統計等の全ての領域で広く使われる。より正確に言えば,文字式なしではその領域の数量的推論を展開するのは不可能なのである。文字式は定量的方法を利用する科学で必須であり,それは物理的科学や経済学に典型的に見られる。このことは工学の領域でも真である。

イ．文字式が効果的であるところ

文字式は,関数関係の研究をおくと,パターン発見と一般化及び広い意味での問題解決に特に有効である(Bell 1995；DES & WO 1989；NCTM 1989, 2000；Royal Society & JMC Working Group 1995；Schoen 1988)。パターン発見は,ある状況を独特のものでなく,何らかの集合の 1 つの要素と見ることによってなされる。これは変数の生成を想定していて,数のパターンに対しては文字式を使って表すことがたいそう適切である。

例 1. 数のパターン：整数の平方に 1 をたした数の積

三整数 1，2，3 に対して，等式

$$(1^2 + 1)(2^2 + 1) = 3^2 + 1 \qquad (1)$$

が成り立つ。左辺は 2×5=10 で，それは右辺に等しいからである。

この等式は三整数 1，2，3 の間だけの独特で特別な関係のように見える。しかし，他の等式

$$(2^2 + 1)(3^2 + 1) = 7^2 + 1 \qquad (2)$$

が成り立つ。こうして，我々は三整数の組(1，2，3) を連続する三整数という特別な組でなく，連続する二整数と他の整数の組の一つと見ることができる。我々は上の形のパターンについて，連続する二整数に対して各数の平方と 1 の和の積はある整数の平方と 1 の和に等しいという予想をすることができる。この予想は，文字式を使って次のように簡潔に書かれる。

$$(n^2+1)((n+1)^2+1)=A^2 + 1,$$

ただし A はある整数。

A を n(n+1)+1 として，この等式の成り立つことが分かる。

さらに，上の(1)と(2)と似た次の等式にパターンが見つけられる。

$$(1^2+1)(3^2+1)=4^2+4,$$
$$(2^2+1)(4^2+1)=9^2+4.$$

これから次の予想が導かれる。

$$(n^2 + 1)((n + 2)^2 + 1) = P^2 + 4,$$

ただし P はある整数。

一般化は「変数を構成する」ことを意味する(Dörfler 1991)。このことはある不変なものの存在を想定することになる。数に関する命題の一般化には文字式を使うことが必要である(Harel & Tall 1991；Lee 1996；Mason 1996)。

例 2. 例 1 の一般化

例 1 の等式　$(n^2+1)((n+1)^2+1) = A^2+1$，$A = n(n+1)+1$,から演算＋ を変数とみなし，因数と結果の形を保存して，次のように，一般化することができる。

$$(n^2-1)((n+1)^2-1) = B^2-1,$$

B はある整数。

$(B = n(n+1) - 1)$.

さらに，1 を変数とみなし，因数と結果の形を保存して一般化することができる。

$$(n^2+k)((n+1)^2+k) = C^2+k,$$

k は任意の整数，C はある整数。

$(C = n(n+1) + k)$.

進んで，連続する整数 n と n + 1 を n と n + m に一般化するとき，次の等式が成り立つことが見出される。

$$(n^2+1)((n+m)^2+1) = Q^2+m^2,$$

m は任意の整数，Q はある整数。

$(Q=n(n+m)+1)$.

$$(n^2+k)((n+m)^2+k) = R^2+m^2k,$$

k と m は任意の整数，R はある整数。

$(R = n(n+m)+k)$.

問題解決では，文字式は数学的に定式化された問題だけでなく，定式化がなされていない問題に対しても有効に使われる。前者で典型的なのは方程式や不等式の応用である。後者においては，文字式は問題の定式化と解決の両方に使われる。数学的モデル化は典型的な例である。そのときには，その状況下のさまざまの数量関係の中で最も重要な関係を特定することが非常に大切であり，文字式はその作業に適している。

例 3. 「缶の問題」(熊谷 1999)

多くの種類の缶の中で，飲み物の缶に焦点を合わせる。それらは円柱とみなされる。下の表 1 は，6 つの飲み物缶の形のデータ，つまり，体積 V (c.c.)，底面の円の半径 r (cm)，高 h (cm) と割合 $h/2r$ である(表 1)。

表 1

商品	V (c.c.)	r (cm)	h (cm)	rate $h/2r$	$(s(x))$
A	128	2.45	6.80	1.387	(1.011)
B	360	3.35	10.20	1.522	(1.019)
C	525	3.60	12.90	1.792	(1.036)
D	1242	5.15	14.90	1.447	(1.015)
E	2306	6.65	16.60	1.248	(1.005)
F	2528	6.80	17.40	1.279	(1.007)

円柱の体積が一定であるとき，その表面積が最小になるのは $h = 2r$ のとき，つまり，高さと底面の直径が等しいときである。それは初等微積分で得られる。表面積が最小の円柱は真横から見ると正方形に見える。上の表から分かるように，飲み物の缶はこの最適の形から大きくずれている。何故このことが起こるのか? つまり，何故，飲み物会社は(表面積)材料の損失を無視して外観や缶の取り扱い易さを選ぶのか? 以下は，この問いに対する解答である。

円柱の底面の半径が r で高さが h のとき，その表面積と体積をそれぞれ，S，V とすると，

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2,\ V = \pi r^2 h$$

V が一定の値 V_0 であるとする。 上で述べたように，S は $h = 2r$ のとき最小になる。 S が最小のときの r と S の値をそれぞれ r_0 と S_{min} で表す。

$$V_0 = \pi r_0^2 \times 2r_0 = 2\pi r_0^3,$$

$$S_{min} = 2\pi r_0 \times 2r_0 + 2\pi r_0^2$$

$$= 6\pi r_0^2$$

$x = h/2r$ とおく。$x = 1$ のとき，S は最小で，$S = S_{min}$。

S(x)を値 x に対する表面積とし，s(x) = S(x)/S min を考えると，これは，x のときの表面積が最小値からどれだけずれているかの割合を表す。そこで，s(x)を x の関数として値の変化を考える。

$$h = 2rx,$$
$$S(x) = 2\pi rh + 2\pi r^2$$
$$= 4\pi r^2 x + 2\pi r^2$$
$$= 2\pi r^2 (2x + 1),$$
$$V_0 = \pi r^2 \times 2rx = 2\pi r^3 x$$
$$= 2\pi r_0{}^3,$$
$$r^3 x = r_0{}^3, \quad r = r_0 x^{-1/3}$$

$$S(x) = 2\pi r_0{}^2 (2x+1)x^{-2/3}$$
$$s(x) = S(x) / S_{min}$$
$$= (2\pi r_0{}^2 (2x+1)x^{-2/3}) /(6\pi r_0{}^2)$$
$$= 1/3\times (2x+1)x^{-2/3}$$
$$= 1/3\times((2x+1)^3 /x^2)^{1/3}$$
$$= 1/3\times(8x+12+6/x+1/x^2)^{1/3}$$

しかし，区間 1.1≦x≦1.8 における s(x) の値が分からないと，s(x)の値の変化が分からず，問いの解決に達することはできない。コンピュータ表計算ソフトウエアを使って，次の結果が得られる(表２)。

表２

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
s(x)	1.001	1.004	1.007	1.012	1.017	1.023	1.030	1.036	1.043	1.050

これから，表面積の最小値からのずれ，つまり損失が予想外に小さいことが分かる。例えば，*x* が 1.3 より小さいとき損失は 1%未満である。上の表の *x* の値に対応する *s(x)* の値は括弧付きで表に示してある。こうして，会社は表面積の材料の損失を無視でき，外見や扱い易さを選ぶのである。

文字式の使用だけでは問題解決はできないが，電卓・コンピュータのような計算機械との協同が非常に役立つことを忘れてはならない。しかし，上のケースのように，文字式を使うことなしでは解決に到達できないのである。

2　導入段階における文字式の教授

一般に文字式の教授，中でも特に導入段階でのそれは，不可欠な数学言語としての文字式に関する文盲を生み出さないことが非常に重要である。文字式が新しく導入される言語とみなされるのに何の疑いもないので，次の諸点が教授の際に基本的に必要である(望月、山田 1996)：

- 生徒にそれを使ってコミュニケートしたり考えたりする強い欲求を持たせる。
- コミュニケーションや思考の目的をはっきりさせる。
- 何をコミュニケートしたり考えたりするかを，書くときの決まりとともに重視する。

次の提案は上の観点から導かれる。

(1)導入段階の教授のための提案

文字式は，少数の能力ある人のためでなくて全ての人のための数学の基礎であるという原則に従って，私が提案したいのは，特に，導入段階の文字式の教授は，言語的な面とその使用を組織的に結合させるのが望ましいことである。上の原則が示すのは，全ての人が数学のコミュニケーションと思考の手段としての文字式の使用ができるような堅固な基礎を確実に作り上げることが決定的に重要であることである。このことは直ちに，生徒が文字式をつくりそれを操作することができるようになることと解釈されるかもしれない。それは部分的に真であるだけである。私は，少なからずの生徒が文字式の使

用に気が進まない証拠を見出している。より詳しく言えば，文字式の使用が適切であり，生徒自身がそれを使うことができる状況においてさえ，彼らの多くは文字式の使用を渋り，その代わりに数値的あるいは幾何的手段を使うことを選ぶのである。

その証拠は我々の日米共同研究の経験である(中原(石田)1992)。そこでは，問題“線分 AB 上に点Pを取り，APを１辺とする正方形とPBを辺とする正方形をつくる。2 つの正方形の面積の和を最小にするには，点Pをどこに取ればよいか？　解決の仕方と答を書け。”について調査を行った。日本の第 11 学年生徒(高校 2 年生)の被験者の結果に注目する。彼らは，上の問題に必要な二次方程式や二次関数を既に学習していて，必要な知識と技能を使うことができると期待されていた。日本の被験者の 83%が正答であって，彼らの反応を，使った方法によって分類すると，次のようである(表３)。

表３

反応	反応の百分率 (N=234)
·二次式(完全)	15%
·二次式(不完全)	13%
·数値の表(面積の計算)	26%
·図をかく	20%
·言葉による説明	15%
·無答	11%

不完全な仕方を含んで生徒の僅か約 1/4，正しくは 28%が文字式を使った。無答を除いた 61%の生徒は文字式以外の数表，図や言葉の説明を使った。それらの方法は一般的でなく例示的なものである。

こうして，できるようになることは必ずしも使う意思につながるわけでなく，文字式をつくったり操作したりすることに巧みであるだけでは数学の固い基礎となるわけではない。比喩的に言うなら，技能の面で巧みになることは文法と書き方の綴りの訓練になぞらえられる。何を，また，どんな目的でコミュニケーションをし思考するかが，同じく大切なのである。

上で唱道した教授は今日行われているものとは違っていないではないかと言う人がいるかもしれない。例えば，日本の文部省学習指導要領を見ると(文部省 1989，1999)，第７学年，つまり，中学校第１学年の数学の文字式に関する指導内容は，文字式に表すこと，その計算(一元一次方程式を解くのに必要な程度)，一次方程式とその利用，及び比例と反比例となっている。これは，生徒がその学年で文字式の言語的な面とその使用を学習することを示しており，上で唱道した教授が既に存在しているように見える。しかし，実際の教室では，先ず，表すこと，次に操作すること，続いて方程式と文章問題を解くこと，最後に比例と，内容が順次に教えられている。決して，組織的に結合されたり一つにまとめられたりしていない。式に表す際は，いろいろの種類の量とその関係が教えられる。生徒はその学習に熱中して，それを何に使うかにまで思考を向ける余裕がない。このことは，適切な文脈を考慮することが欠けていることを示している。多くの種類の量とその関係を式に表すことは，方程式を使う文章問題を解くことといろいろの場面での比例の準備を目指すためと考えられる。というのは，そこにはさまざまの種類の量とその関係が含まれるからである。文字式の計算では，操作の仕方が教えられ，生徒はそれに巧みになるよう練習を熱心にする。彼らにとって，技能に習熟することはそのこと自身のため，または，数学で良い点を取るためのように見える。もちろん，操作の適度の流暢さが必要であることは明らかである。長い準備の後で，方程式とそれを使って文章問題を解くことと比例が姿を表す。全ての生徒が文字式学習の長い準備を辛抱すると想像できるか? 準備

の間に，彼らは何らかのコミュニケーションあるいは思考の目的を持ち得るか? 彼らは文字式を使ってコミュニケーションをし思考する意思を持ち得るか? 彼らが学び練習したのは決まりとその適用というのが本当ではないか？

こうして決定的に大切なのは，教授の内容・範囲以上に教授アプローチである。望ましいアプローチは，上に挙げた順次的な仕方を止めて，文字式をつくることと操作すること－文字式の大切な言語的な面－とその使用を組織的に融合しまとめることである。パターン発見と一般化，さらに問題解決は文字式使用の良い例である(Bell 1995；DES & WO 1989；NCTM 1989, 2000；Royal Society & JMC Working Group 1995；Schoen 1988)。そのとき，適切な文脈の設定を忘れてはならない(Algebra Working Group to NCTM 1995)。加えて，次の点が注意される(望月、山田 1996)。

・生徒が，日常言語，数表やグラフのようなさまざまの表現の仕方の中で，文字式の良さを理解できるようにする。
・理由なしに決まりや制約を課したり，特定の表現の使用を生徒に強いたりしない。

(2)言語の面の三つの過程の教授

三つの過程，表す，読む，変形するは，文字式の導入段階の教授の中核的部分である。

始めに注意すべきことは，導入段階では文字式の文字は数及び数値を表すことである。第二に，形式の観点から，文字式は句型と文型の二つに分類されることである。前者は，対象を表す記号と算術演算を表す印しと括弧を含み，後者は二つの句型の式を関係を表す印しでつないだ形である。句型の式は数量を，文型の式は数量関係を、それぞれ表す(三輪 1996；Miwa 1998)。

ア．表す

表す過程，つまり，文字式をつくることは確かに文字式教授のスタートである(Bell 1995；Royal Society & JMC Working Group 1995)。言うまでもなく，生徒にとって文化的基盤としての日常言語の構造はこの過程に大きく影響する。教師は，その教授ではいつもこの重要性を忘れてはならない。

句型の式に表す過程では，表される数量と表す文字の両面からの考察が必要である。前者では，算術演算(四則)の意味と量の間のいろいろの公式に加えて，整数の順序と除法による剰余類の理解が必要である。後者については次の原則が暗黙に存在する(三輪 1996；Miwa 1998)。

・異なった量は異なった文字で表す。
・ある量が既に文字や数詞で表された他の量によって定まるなら，その量はそれが定められる仕方で表す。

ここで二つの問題を論ずる。一つは，生徒が，数値的に計算できる量についてもそれを文字式で表すことが困難であることである。私はかなりの数の生徒がこの型の困難を感じていると推測している。確かに，彼らは計算できるのだから，算術演算の意味と量の間の関係や公式を知っているに違いない。彼らは計算に集中していて，過程そのものをあまり意識していないに違いない。そこで，この困難を乗り越えるためには，その過程，より詳しくは，計算で使った数がどんな量(または割合等)を表し，それらをどのように(どんな種類の演算をどんな順序で)計算したかを，意識させることが必要である。そのとき，数をあたかも文字のように考えて文字式を作ることができる。過程へのこの注目は，1(1)の文字式の特徴(エ)で述べたことに関わっている。この目的のために，その過程を日常言語や図，図式で表すことが効果的である。

他の問題は，式中の文字の意味の理解とその教授における順序である。通常，文字の意味は未知の定数，一般化された数及び関数関係における変数が挙げられる(Küchemann 1981；Usiskin 1988)。それ故，それらを適切な順序

で系統的に教えることが必要である。それができないと，生徒は深刻な混乱に陥るに違いない。日本の中学 1 年生に対しては，一次方程式の教授の後に比例の教授が始まり，式 $y = ax$ が提示される。文字 x，y と a が何を意味するかは生徒に説明されるが，彼らにとって，a をさておくとして，方程式の x と比例のそれを区別することは容易でない課題であろう。

式型の文字式に表す過程について短く説明を加えよう。方程式や等式は式型の文字式の典型的な例であって，二つの句型の式を等号「＝」でつないだものである。しかしながら，生徒にとって，方程式や等式をつくることは一般に難しい。それらが多くの問題では二つの句型の式を単に等号でつなぐことではないからである(Lockhead & Mestre 1988；MacGregor & Stacey 1993；Stacey & MacGregor to appear)。学生-教授問題の逆の誤りはその例である。文章問題を解くのに必要な一元方程式を作るには，与えられた問題に含まれるいろいろの数量の検討とそれらの関係の分析を通して，等しい数量を特定し，その数量を適当な未知の数量を表す文字 x を使って，二通りの句型の式に表すことが必要である(三輪 1996；Bednarz & Dufour-Janvier 1994；MacGregor & Stacey 1996a；Miwa 1998；Thompson & Thompson 1995)。

イ．読む

読む過程はもともと表す過程の逆の過程，つまり，文字式から表された数量やその関係への移行である。それは，文字式を数量や数量関係に結び付けることであり，その場面で文字式が意味するものを明らかにすることである(MacGregor & Stacey 1994, 1996b)。読むことでは，文字式は，場面の文脈と使用者の意図によって日常言語，数値や図形を参照することになる(三輪 1996；Miwa 1999)。なお，文字式をもとの場面と違った場面で読むことができる。これによって文字式の意味するものをいっそう広い情況に拡げることができる。例えば，代数の乗法公式は，幾何的に面積や体積の関係と読み解釈される。

さらに，この過程は，そこから新しい発見をしたり洞察を得たりするようないっそう深い理解と新しい見方に到達することを含むとみられる。実際，文字式が意味するものを明確に把握し考え直すことによって，一般化や特殊化を行うことができる(三輪 1996；Miwa 1999)。次の例は，一般化のアイデアに基づくものである。

例４． 7，11，13，17，19 の倍数の見分け方

2 桁の数 $10a+b$ は，$a+b$ が 9 の倍数であるとき，9 の倍数であることはよく知られている。これは，次の式を見れば明らかである。

$$10a+b=(9+1)a+b=9a+(a+b).$$

いま，10 の代わりに 100 を取り，ある素数，例えば，17 の倍数で 100 に近い数を探し，9 の倍数の見分け方をそのまま生かすことを考える。

3 桁以上の数を $100a+b$ と表す。a は正の整数，b は 100 より小さい負でない整数である。

・<u>17 の倍数</u>: $102=17\times6$ で $100a+b=102a+(-2a+b)$ だから，$100a+b$ は，$(-2a+b)$ が 17 の倍数であるとき，17 の倍数である。例えば， 646 は 17 の倍数である。というのは，この場合は，$a=6$ で $-2a+b=-12+46=34=17\times2$ であるからである。

・<u>7 の倍数</u>: $98=7\times14$ で $100a+b=98a+(2a+b)$ だから，$100a+b$ は，$(2a+b)$ が 7 の倍数であるとき，7 の倍数である。例えば，1001 は 7 の倍数である。というのは，この場合は，$a=10$ で $2a+b=20+1=21=7\times3$ であるからである。

・<u>13，11，19 の倍数</u>: $104=13\times8$，$99=11\times9$，$95=19\times5$ で，上と同じように考えて，$100a+b$ は，$(-4a+b)$ が 13 の倍数であるときに 13 の倍数であり，(a

＋b) が 11 の倍数であるときに 11 の倍数であり，(5a＋b) が 19 の倍数であるときに 19 の倍数である。

この見分け方は，これらの数の 2 桁の倍数を知っているとき，有用である。

ウ．変形する

文字式を変形する過程は，与えられた文字式を始めのものとは異なった形に変えることである。例えば，句型の式では，簡単にする，展開する，因数分解するのような式の計算である(Bell 1995； Royal Society & JMC Working Group 1995)。

変形することは形式的に，つまり，文字の意味や文字式の文脈を考慮することなしになされる。これは文字式の著しい強さである。しかし，その代わりに，変形は変形規則に従って行わなければばならない。その規則は変形における不変なものの存在を暗黙の中に含んでいる。実際，句型の式の変形に対しては，表された数量が不変であり，どんな値の代入に対してもその値が確定しているなら数値は変わらない。文型の式に対しては，数量関係が不変である(三輪 1996；Miwa 1999)。

使用者が変形規則に従う限り，文字式はどんな形にも変形することができる。それ故，使用者がその目標を意識しないなら変形は効果的に行うことはできない。つまり，変形は使用者の明確に意図した目標に導かれるのである。生徒がしばしば文字式を使っている途中で道に迷ったり，無用にぐるぐる回りをする理由の一部分，しかし，小さくない部分がこれである(三輪 1996；Miwa 1999)。

変形する過程の教授では，変形規則は従うべき規則として形式的に与えるのでなく，数値，数量や図形などの具体なものに裏付けられた有意味な規則と与えることが望ましい。

エ．三つの過程の密接な関係

文字式を使う際の三つの過程の役割は 1(1)の文字式使用の図式に示されている。しかし，詳しく見ていくと，三つの過程は孤立したものでなく，つながりを持つべきものと考えられる。そして，そのつながりをうまく使うことは，教授に効果がある。次に述べるのは，その幾つかの例である(Arcavi 1994)。

つくられた文字式を読みそれをもとの事象に関係づけることは，数量やその関係を正しく表したかどうかを点検することを可能にする。こうして，表すことと読むことは，行ったり戻ったりする過程とみなすことができる。式に数値を代入することは，読むことによる点検の別の例である。これは数表から得られた式を点検するのに役立つ(MacGregor & Stacey 1993)。

さらに，表す過程では文字や文字式が場面の構造をフルに表現できるよう適切にそれらを選択することが大切であるが，それについては，つくられた式を読むことを通して選択が適切かどうかを調べることができる。例えば，命題“連続する三整数について，中央の数の平方は他の二数の積より 1 大きい。”について，ある生徒が三整数を x, y, z で表して，$x^2－yz＝1$ としたとする(Kieran 1992)。 この式を読むと直ぐ，命題の不可欠の条件である連続した整数ということを表していないので，上の式は不適当であることが明らかになる。加えて，読むことはしばしば式のより良い選択を可能にする。例えば，命題“連続する三整数の和は 3 の倍数である。”について，ある生徒が，n＋(n＋1)＋(n＋2)＝3n＋3 と表したとする。右辺が 3 (n＋1) と書き直され，和が中央の数の 3 倍であると読むことができる。そこで，中央の数を n で表すと，この三整数は，n－1，n，n＋1 と表され，その和は，(n-1)＋n＋(n＋1) ＝3n に等しい。このとき，我々はそこに対称性を見出し，この命題を，1 を k に変えることにより，また，連続する三整数を連続する五整数，さらに他の奇数個の連続する整数に変えることによって，一般化することができる(三輪 1996；Miwa

1999)。

しばしば，ある場面で，ある数量が異なった考え方に基づいて異なった式で表わされることがあり，生徒はそれらが同じかどうかを尋ねることがある。このとき，変形はその疑問を解消する。例えば，おはじきを，下の図２に示すように，縦 a 個，横 b 個の長方形の周の形に並べるとき，辺上のおはじきの総数はいろいろの仕方で式に表される。

次に挙げるのはその例である。

・$2(a+b)-4$,　　・$2a+2(b-2)$,

・$2(a-1)+2(b-1)$,　・$ab-(a-2)(b-2)$.

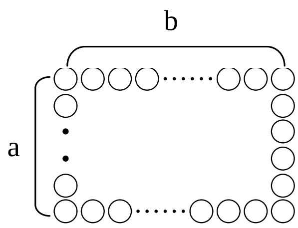

図２

簡単な計算によって，これらが全て等しいことが分かる。

変形が正しくなされたかどうかは，代入によって，変形された式の値ともとの式の値を比較することで点検される。さらに，変形による結果が理に叶っているのを確かめることも，読むこと，例えば，数値の比較や図形をかくことによってなされる。

読むことが変形の目標を決めるのを助けることを付け加えよう。例えば，等式　(1(2)の例 1 参照)

$$(n^2 + 1)((n + 1)^2 + 1) = A^2 + 1,$$

A は整数,

を証明したいとき，左辺を展開して，

$$n^2 (n + 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + 1$$

が右辺 $A^2 + 1$ に等しくなければならないことが分かる。それで，　$n^2 (n + 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = A^2$ が変形の目標と見られる。

(3)　小学校の算術教授との関係

生徒の文字式の理解は算術の理解に基礎をおくのであるから，文字式の教授が小学校算術のそれに基礎をおくことは明らかである (Herscovics & Linchevski 1994；Kieran 1989, 1990；Lee & Wheeler 1989；Thompson & Thompson 1995)。実際，文字式の文字は数や数量を表し，演算の印しと規則は算術のそれと同じである。しかしながら，算術の数の式と文字式の間には違いがある。例えば，算術では，数字の連結は普通 23 = 20+3，2・1/3 = 2 + 1/3 のように加法を表すのに対して，文字式のそれは，$2a = 2\times a$，$ab = a\times b$ のように乗法を表す。その上，生徒は，しばしば算術では，3＋2＝5 のように，等号の左側は過程を示し，右側は結果を示すと認識し，両辺が等しいあるいは同値であると認識しないことがある。 明らかに文字式ではそうではない。さらに，算術における問題解決の方略と方程式 ― 典型的な文字式 ― を利用するときの方略は非常に異なっている(Kieran 1989, 1990)。こうして，文字式における多くの生徒のミスコンセプション(誤った観念)や誤解が彼らの算術学習に由来するのである。文字式の教授においては，生徒が算術で学んだものを，そのまま保ちさらに強化すべきものと，考え直し修正すべきものの二つにグループ分けし，両方を適切に考慮に入れることが不可欠である。

次に述べるのは，前者に含まれるもので，算術でフルに習得するのが期待されるものである。これらは文字式をつくるのに非常に大切である。

・<u>数概念とその算術演算との関係，特に，有理数の概念と除法の関係</u>(大阪数学教育研究会 1987)

算術で必要とされるのは，数の四則計算の熟達と，演算について閉じているという性質とその結果を明確に表現することの把握である。このとき，除法が特に問題になる。算術で整数の除法は，整数の範囲内で商と余りを求める，有

限小数または無限小数の商を求める，分数の商を求めるの三つの仕方でなされる。例えば，13を3で割る除法では，あり得る答は，4余り1，4.333･･･，4・1/3 (または13/3) である。生徒の中には，整数の除法が確定した答を持つことに確信を持つことができない者がいる。一方，文字式では，a÷3 は分数の形 a/3 に書かれる。生徒の中には，aが3で割り切れないとき，a/3 が確定した数を表すことを認識できない者がいる。彼らは，それを何か理解できないものと考え，操作することができないだけでなく，数学の規約で確定しない不可思議なものを書くことを強いられていると感ずるかもしれない。このことは，数学の典型的なツールとしての文字式に対する不信の感情に導く。そのような状況を防ぐために，教師は生徒が，除法は除数が0でないとき常に可能で，その結果である商は確定していて分数で表されることを認識するのを助けることが必要である。つまり，生徒は，有理数の概念とその表現 a/b(a，b は整数で b≠0) を理解する必要がある。

加えて，理解すべきなのは，整数に対して乗法的式表現が割り切れる(整除される)ことを意味することである。例えば，15が3×5の形に表されるとき，15 が 3 で割り切れることが分かり，15 を 3 で割る割り算を実際に行う必要はない。この表現は，文字式や算術の倍数・約数の問題に使われる。

・数量関係とその算術演算との関係

幾何的な量，物理的な量やそれらから導き出された量，それに日常生活での量が算術で教えられる。それらは中等数学でも取り扱われる。これらの量の間の関係も大切である。一般に量の間の関係は加減乗除の四つの算術演算で表現され，それらは演算の意味に関連している。それらのあるものは，日常言語での公式に挙げられる。例えば，速さは距離を経過時間で割ったものに等しい。演算で表現された数量関係の理解なしでは，文字式をつくることは殆ど不可能か，それに近い。

・割合，比と比例(大阪数学教育研究会 1987)

多くの生徒が，整数の場合はできても，分数を含んだ場合数量を文字式に表すことに困難を感じていることは広く認められている。このことは割合や比を含む問題での数量やその関係についても真である。一般に数の乗法と除法，特に分数の乗法と除法や数量間の乗法的関係は，比例のアイデアに深く根ざしている。比例のアイデアは明らかに割合や比の観念を前提にする。これらの観念は内在的であると想定されるが，それに気づくようにすることが必須である。こうして，割合，比と比例の理解は，数量と数量関係を，整数という制約なしに表すために極めて重要である。

(4)教授に最も影響する因子

多くの因子が数学教授に影響を与える。確かに文字式の教授に最も影響力のあるのは，教師をさしおくと，テクノロジーである(Fey 1989；House 1988；Kieran 1990；Wagner & Kieran 1989b)。そこで，テクノロジーと教師に集中しよう。

ア．　テクノロジー

一般的に言って，テクノロジーは生徒のいろいろの数学的活動に刺激を与えそれを促進し，その数学的思考を伸ばすのを助ける。電卓とコンピュータは今日，数学の教室のテクノロジーの中で最もなじみのあるツールであって，それは非常に強力である。例えば，グラフ電卓は関数関係の式が与えられるとグラフをかき，ズームによって対応する値をいっそう詳しく示す能力を持つし，コンピュータは文字式を操作する能力を持っている。

それらは文字式の教授に非常に役立つことが期待される(Kaput 1995；Royal Society & JMC Working Group 1995)。しかしながら，指摘しなければならないのは，電卓やコンピュータが文字式に取って代わることはできないこ

と，つまり，式が与えられたとき，それらの機械はグラフをかき操作するが，問題場面から式そのものを与えることはできないことである。その上，それらは生徒が文字式をつくるのを直接に助けることができないことも明らかである。コンピュータ・プログラミングは文字式をつくるのを助けると言われる(Sutherland 1989, 1991, 1993)が，文字式の教授をプログラミングの教授で取り替えることができるかどうかは別の問題である。私は，完全にコンピュータに依存する代数教授システムが存在するとしても，それが文字式の教授に効果的であるかどうか疑問に思う。コンピュータ利用のもう一つの例は，文字式をつくることと操作することのためのドリルと練習であって，知的なコンピュータ支援教授(または学習)が今広く利用されている。これは効果的で，生徒に役立つと考えられる。それは明らかに文字式教授の限られた部分であるドリルと練習に関係があるのであって，それは決定的な面とは言えない。

こうして今日，テクノロジーと文字式の教授や文字式を使った思考の協力及び協同作業が非常に大切であり，また望ましい。私は「缶問題」(1(2)の例 3)で，コンピュータと文字式の使用の協力の例を示した。そこでは，表計算による数値的調査と代数的操作の協力によって缶の形が表面積最小の最適なものからずれている理由を明らかにした。

言うまでもなく，情報テクノロジーの進歩は非常に速く驚異的であって，情報テクノロジーと文字式の教授の協力の新しい様式が次の世紀にどのようであるかは，間違いなく最も重大な論点となることであろう。

イ．教師

教師は，誰もが知るように，教授で最も重大な因子である。文字式の教授において，教師の役割は殊に大切である(Thompson & Thompson 1995；Wagner & Kieran 1989b)。その理由の一つは，文字式が言語であることである。教師はそれを良く知っているが，生徒はなじみが非常に薄く，それを知らない。こうして，生徒が使う語は教師の語と違う意味を持っているかもしれないし，教師の言うことが生徒に正しく理解されないかもしれない。また，その逆も言えるだろう。

生徒が数学の授業で文字式に始めて出会うとき，彼らは普通，以前の算術学習の経験に依拠する。生徒の以前の経験は確かに役立つが，2(3)で論じたように，実際にミスコンセプションや誤解を引き起こす。数学言語の熟達した使用者としての教師に要請されるのは，生徒が誤解を直すのを助け，彼らのミスコンセプションに対する思いやりのある想像力を持つことである。ときには，生徒の書いているものやしていることが教師の想像を越えるかもしれない。教師は忍耐を持ってその状況に対応することが期待される。ミスコンセプションや誤解の例は世界中の数学教育研究文献に見出されるが，明らかに全てが見出されるわけではない。この点で，研究者としての教師が期待される役割である。

教授における例の役割に関して教師に対するもう一つの期待を付け加える。文字式の教授においては，教師はしばしば概念や決まりを例を使って説明する。大切なのは概念や決まり一般であって，例は理解を容易にするために使われるのであり，生徒は例を通して概念や決まりが分かることが期待されている。これは文字式を使う問題解決においても真である。大切なのは，文字式の使用が文章問題を含んで問題解決に非常に役立つことを知ることである。しかしながら，しばしば，数学授業で解決された問題の理解が強調される一方で，これらの問題が例であることが忘れ去られていることがある。

終わりの注意

この講演で，私は始めに数学の言語としての文字式の特徴，並びに，その数学及び科学への広い使用とそれがパターン発見と一般化，さら

に問題解決に効果的であることを論じた。第二に，導入段階における文字式教授に集中して，教授についての提案を示し，言語の面の教授，つまり，表す，読む，変形するの三つの過程とそのつながりを論じた。次いで，小学校における算術教授との関係を考察し，最後に最も影響力ある因子であるテクノロジーと教師について述べた。これらは学校教育に関するものであるが，成人に対する生涯教育と教師教育にも役立つと信ずる。

ここで，時間が限られているので触れなかった学校数学の中・上級段階の文字式の教授における論点を少しばかり挙げることにする。

- ベクトルや行列のように，数量を越えて拡大された文字の意味の理解，その代数構造は数体とは異なっている。
- 式とその値の区別，それは恒等式の概念につながる。
- パラメータと変数という文字の意味の違いの理解。
- 問題に含まれる数量関係の中から最も重要な関係を特定するのに巧みになること。

私が今日論じたことは新しいものでなく，聞いて下さった多くの方にとっては周知のことばかりであろう。終わりに述べたいのは，知られたことが授業でいつも行われているとは限らないこと，数学の教授・学習一般において，特に文字式のそれにおいて，我々が知るべきことがさらに多く存在するに違いないことである。

注

1) これは、2000 年 7 月 31 日－8 月 6 日、千葉市幕張で開催された第 9 回数学教育世界会議・特別講演のテキストを、引用・参考文献を含むように改訂したものの日本語版である。

引用・参考文献

大阪数学教育研究会 (1987). 分数・文字式を教えるということ, 明治図書.

熊谷光一 (1999). 教材開発の視点：素材から教材へ一缶の問題を手がかりとして, 杉山吉茂(編著), 高度情報化社会に対応する数学教育カリキュラムの開発に関する総合的研究(平成 8－10 年度文部省科学研究費補助金・基盤研究(A)研究成果報告書), 東京学芸大学, 25-37.

中原(石田)忠男 (1992). 日米共通調査による問題解決の研究―「正方形の面積」について―, 三輪辰郎 (編著), 日本とアメリカの数学的問題解決の指導, 東洋館, 119-134.

中村幸四郎 (1962). 数学史, 啓林館.

三輪辰郎 (1996). 文字式の指導：序説, 筑波数学教育研究 15, 1-14.

望月昭彦・山田登 (編著). (1996). 私の英語授業, 大修館.

文部省 (編). (1989). 中学校指導書　数学編, 大阪書籍.

文部省 (編). (1989). 中学校学習指導要領(平成 10 年 12 月)解説―数学編―, 大阪書籍.

Algebra Working Group to the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1995). A Framework for Constructing a Vision of Algebra: a Discussion Document, Reston, VA, NCTM.

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics, For the Learning of Mathematics, 14(3), 24-35.

Bednarz, N. et al. (Eds.). (1996). Approaches to Algebra, Kluwer, Dordrecht.

Bednarz, N. & B. Dufour-Janvier (1994). The Emergence and Development of Algebra in a Problem Solving Context: A Problem Analysis. In da Ponte, J. P. & J. F. Matos (Eds.), Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education

(2), 64-71.

Bell, A. (1995). Purpose in School Algebra, Journal of Mathematical Behavior, 14, 41-73.

Coxford, A. F. (Eds.). (1988). The Ideas of Algebra, 1988 Year book, Reston, VA, NCTM.

Department of Education and Science (DES) and the Welsh Office (WO) (1989). Mathematics on the National Curriculum, London, Her Majesty ‘s Stationary Office.

Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics. In A. J. Bishop et al. (Eds.), Mathematical knowledge: Its Growth Through Teaching, Kluwer, Dordrecht, 63-85.

Dossey, J. (1998). Making Algebra Dynamic and Motivating: A National Challenge. In NCTM & MSEB (Eds.), The Nature and Role of Algebra in the K-12 Curriculum Proceedings of a National Symposium May 27 and 28, 1997, National Academy Press, 17-23.

Fey, J. T. (1989). School Algebra for the Year 2000. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, NCTM, 199-213.

Harel, G. & D. Tall (1991). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics, For the Learning of Mathematics, 11(1), 38-42.

Herscovics, N. (1989). Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, NCTM, 60-86.

Herscovics, N. & L. Linchevski (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra, Educational Studies in Mathematics, 27, 59-78.

House, P. A. (1988). Reshaping School Algebra: Why and How. In A. F. Coxford (Eds.), The Ideas of Algebra, 1988 Yearbook, NCTM, 1-7.

Kaput, J. (1995). Long-term Algebra Reform: Democratizing Access to Big Ideas. In C. B. Lacampagne et al. (Eds.), The Algebra Initiative Colloquium, U. S. Government Printing Office, 33-52.

Kaput, J. (1998). Transforming Algebra from an Engine of Inequality to an Engine of Mathematical Power by “algebrafying” the K-12 Curriculum. In NCTM & MSEB (Eds.), The Nature and Role of Algebra in the K-12 Curriculum Proceedings of a National Symposium May 27 and 28, 1997, National Academy Press, 25-26.

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: a Structural Perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, NCTM, 33-56.

Kieran, C. (1990). Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and Cognition, Cambridge University Press, 96 -112.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra, In D. A. Grouws (Eds.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, NCTM, 390-419.

Kieran, C. (1996). The Changing Face of School algebra. In Alisina, C. et al. (Eds.), 8th International Congress on Mathematical Education, Selected

Lectures, S.E.E.M. 'THALES', 271-290.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart et al. (Eds.), Children's Understanding of Mathematics:11-16, John Murray, 102-119.

Lacampagne, C. B. et al. (Eds.). (1995). The Algebra Initiative Colloquium, Washington, D. C., U. S. Government Printing Office.

Lee, L. & D. Wheeler (1989). The Arithmetic Connection, Educational Studies in Mathematics, 20, 41-54.

Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture Through Generalization Activities. In N. Bednarz et al. (Eds.), Approaches to Algebra, Kluwer, 87-106.

Lockhead, J., & J. P. Mestre. (1988). From Words to Algebra: Mending Misconceptions. In A. F. Coxford (Eds.), The Ideas of Algebra, 1988 Yearbook, NCTM, 127-135.

MacGregor, M. & K. Stacey (1993). Seeing a Pattern and Writing a Rule. In I. Hirabayashi et al. (Eds.), Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, University of Tsukuba, (1), 181-188.

MacGregor, M. & K. Stacey (1994). Metalinguistic Awareness and Algebra Learning. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, University of Lisbon, (3), 200-207.

MacGregor, M. & K. Stacey (1996a). Learning to Formulate Equations for Problems. In Puig, L. & A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Universitat de Valencia, (3), 289-296.

MacGregor, M. & K. Stacey (1996b). Origins of Students' interpretations of Algebraic Notation. In Puig, L. & A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Universitat de Valencia (3), 297-304.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra In N. Bednarz et al. (Eds.), Approaches to Algebra, Kluwer, 65-86.

Miwa, T. (1998). Teaching of Symbolic Expressions : An Introduction (1), Meiji Daigaku Kyosyokukatei Nenpou (Yearbook of Teacher Education Program at Meiji University) 20, 47-56.

Miwa, T. (1999). Teaching of Symbolic Expressions : An Introduction (2), Meiji Daigaku Kyosyokukatei Nenpou (Yearbook of Teacher Education Program at Meiji University), 21, 15-25.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, VA, NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and Standards for School Mathematics, Reston, VA, NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) & Mathematical Sciences Education Board (MSEB) (Eds.) (1998). The Nature and Role of Algebra in the

K-12 Curriculum Proceedings of a National Symposium May 27 and 28, 1997, Washington, D. C. National Academy Press.

Royal Society & JMC Working Group (1995). Teaching and Learning Algebra pre-19, London, Royal Society & JMC.

Schoen, H. (1988). Teaching Elementary Algebra with a Word Problem Focus. In A. F. Coxford (Eds.), The Ideas of Algebra, 1988 Year book, NCTM, 119-126.

Sfard, A. (1987). Two Conceptions of Mathematical Notions: Operational and Structural. In J. C. Bergeron et al (Eds.), Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Universite de Montreal (3), 162-169.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Stacey, K. & M. MacGregor : to appear. Curriculum Reform and Approach to Algebra. In R. Sutherland (Eds.), Algebraic Processes and Structure, Kluwer.

Steen, L.A. (1995). Algebra for All: Dumbing Down or Summing Up? In C. B. Lacampagne et al. (Eds.), The Algebra Initiative Colloquium, U. S. Government Printing Office, 121-140.

Sutherland, R. (1989). Providing a Computer Based Framework for Algebraic Thinking, Educational Studies in Mathematics, 20, 317-344.

Sutherland, R. (1991). Some Unanswered Research Questions on the Teaching and Learning of Algebra, For the Learning of Mathematics, 11 (3), 40-46.

Sutherland, R. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems, Journal of Mathematical Behavior, 12, 353-383.

Thompson, A. G. & P. W. (1995). A Cognitive Perspective on the Mathematical Preparation of Teachers: The Case of Algebra In C. B. Lacampagne et al. (Eds.), The Algebra Initiative Colloquium, U. S. Government Printing Office, 95-116.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In A. F. Coxford (Eds.), The Ideas of Algebra, 1988 Yearbook, NCTM, 8-19.

Wagner, S., & C. Kieran (Eds.). (1989a). Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Reston, VA, NCTM.

Wagner, S., & C. Kieran. (1989b). An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, NCTM, 220-237.