筑波数学教育研究　第20号　2001

研究論文

思考実験を含む数学するモデルの設計
A model of doing mathematics included thought experiments

倉井　庸維(Nobutada KURAI)
筑波大学附属坂戸高等学校
(Senior High School at Sakado, University of Tsukuba)

本稿の目的は，思考実験を含む数学する過程のモデルを構成することである。このモデルの構成要素は，問題，思考実験，推測，証明であり，2種類の思考実験が，推測の前後に置かれている。推測前の思考実験は，①実験空間，②定数と変数，③変数の変化の方法，の3つが設定された後，推測を得ることを目的に実施される。また，推測後の思考実験は，確信を強める機能と反証的機能の2つがあり，証明へとつながるとしている。この数学する過程のモデルは，平面幾何と重複組み合わせの2つの問題の解決過程に対して適応することによって確認されている。

This purpose of this article is to construct a model of doing mathematics included thoughts experiments(TEs). The other componets are problem, conjecture, proof. Two types of TEs are located before or after the conjecture. On the base of Mach's idea, TE before the conjecture is carried out after three settings(space for the experiment, constant and variable, method of variation)to make a conjecture. TE after the conjecture is applied to verify or disprove the conjecture. The model is applied to two problems-solving processes to check the validity.

キーワード：数学する(Do Math)，思考実験，問題解決，問題設定

1．はじめに

1.1　目的と方法

本稿の目的は，思考実験を含む数学する過程のモデルを構成することである。

この目的を達成するために，まず，思考実験の規定が必要となるが，その方法として，マッハ，Polyaの実験に対する見解を調べ，それらをもとに数学する過程のモデルを構成し，その構成要素として思考実験を位置づけることによって規定する。また，実際に平面幾何と重複組み合わせの2つの問題の解決過程を，このモデルを用いて解釈することによって，モデルの妥当性を検討し，あわせてモデルの意義を示す。

1.2　実験とは

まず，議論を進めるために，実験について明らかにしておく。辞書では，「仮説を検証するために行われる」(物理学辞典編集委員会，1992)場合と，「適当な制限条件を人為的に与えて現象変化を起こさせ，そのなりゆき，結果を調べる」(化学大辞典編集委員会，1963)場合があり，仮説の検証を目的とした実験と，データの収集を目的とした実験の2種類があると考えられる。

これに対して，数学者は，自らの研究実践・体験を通して研究時に行われる実験には，2種類があるとしている。1つは，「未知の数学的現象を探求するための思考実験」(小平，1969)であり，「実例を調べること」(小平，1969)は実験であり，その実験結果から，定理を予想するとしている。もう1つは，「正しいのではないかと思った場合に，その直接的な証明が不可能であれば簡単な例で調べてみる」(上野等，1997)ことを実験としている。

ここから，数学を探求する際にも，なりゆき，結果を調べることを目的として実験を行い，その結果から定理を予想する場合と，すでに仮説が存在し，その真偽を調べるための実験の2種類がありうると思われる。

2　思考実験を含む数学するモデル

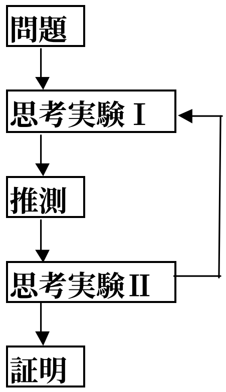
2.1　モデルの設計

こうした実験の定義をもとに，マッハ(1973，1971/1926)，Polya(1973)のアイディアを加えることによって，思考実験を含む数学する過程のモデルの構成を試みる。

マッハは，20世紀初頭に活躍し，思考実験という言葉を最初に用いたと思われる物理学者であるが，思考実験を現物実験に先立って，思考上で行われる実験ととらえた。そして，思考実験の結果として推測が得られ，その推測を確認あるいは検証するために現物実験がなされると見なしていた。マッハ(1926)は，思考実験の本質を「変化させる」ことであるとし，そのために，「理想化」と変化の対象となる「因子の摘出」が必要であるとした。

マッハ(1973)は，主として力学の体系とその体系が作られる過程との差異に着目していた。その後，マッハから影響を受けたPolya(1973)は，完成した数学と作られつつある数学は，異なるにも関わらず，これまでの数学の学習指導では，完成した数学の指導に重点が置かれ過ぎていたことを指摘し，数学が作られる過程を明らかにすることを試みた。Polya(1973)によれば，数学が作られる過程において，数学の対象に対して，推測を暗示する接触(暗示的接触)を繰り返すことによって，推測を形成し，その後，その推測を支持する接触(支持的接触)を行うために，擬実験を行っているとしている。彼は，具体的な例を調べ，そこから帰納して一般化される命題を推測し，その推測された命題に含まれる代表的な要素を取り出し真偽を調べることを擬実験としている。それにより，もし選ばれた要素が，命題を肯定する結果になれば，命題が真である確信は強まるが，そうでなければ，1つの反例となり，推測として出された命題は，反証されるのである。Polyaは，確信を強める方向で具体的な例を検討し，その延長線上に証明を置いていた。つまり，Polyaは，実験を仮説の検証ととらえていたのである。

マッハの提唱した思考実験とPolyaの擬実験とは，使用される場面が，推測の前と後と異なっている。そこで，マッハの思考実験を「思考実験Ⅰ」，Polyaの示した擬実験を「思考実験Ⅱ」として，「問題」，この2つの「思考実験」，「推測」，「証明」との関係を以下のように構成し，数学する過程のモデルとする。[1)]



本稿において以後，「思考実験」という場合は，「思考実験Ⅰ」と「思考実験Ⅱ」の2つを合わせて指すこととする。具体的には，思考実験は，思考上で行われるが，実験の対象は，現物ではなく，数，図形，関係などとし，定規，コンパス，分度器等を用いて行われる実験も，思考実験とする。そこから，図を描く，角の大きさを求める，計算する等は，思考実験の実施に当たる場合もあると考える。これに対して，現物実験とは，実際に物を用いて行う実験であり，円周率の算出のために実物を測定する実験や，さいころ投げや画鋲投げ等の確率の実験が含まれるとする。

2.2　「思考実験Ⅰ」について

上記モデルにおける「思考実験Ⅰ」を詳細化する。まず，上記のモデルにおいて，「思考実験Ⅰ」は，「問題」と「推測」の間で実施されるが，この実施過程を，4つの段階((A)準備，(B)実施，(C)観察，(D)推測形成)に分け，このうちの前3つの段階を「思考実験Ⅰ」とする。

そして，マッハ(1971/1926)の思考実験に対する主要な3つの要素(「理想化」，「因子の摘出」，「変化法」)を，数学用に変形し①「実験空

間」，②「定数と変数」，③「変数の変化方法」の3つの設定を(A)「準備段階」で行うこととする。次に，(B)「実施段階」では，実際に変数を変化させ，それを(C)「観察段階」で変数の変化の様子を観察し，表やグラフを作成し，(C)「推測作成段階」でそれらをもとに推測を作成するとする。これをまとめて表現すると以下のようになる。

「思考実験Ｉ」の実施過程
(A)準備段階・・・以下の3つの設定を行う。
　①実験空間
　②定数と変数
　③変数の変化方法
(B)実施段階
(C)観察段階
(D)推測作成段階

　ある辞書では，思考実験とは，「現実の問題に対する，結果を予想したり，対策を立てたり，計画を樹立する場合に，現実の問題をできるだけ忠実に表現するようなモデルを作り，このモデルについて理論的な考察ないし，操作をして，思考上の実験をすること。」(矢野編，1968)と定められている。この定義の特徴は，現実の問題からモデルを作ることと，そのモデルの中で操作をすることである。これに対して，本稿では，数学の世界というすでにモデル化された世界を前提としており，その中で思考実験を行うことを想定している。そのため，(A)準備段階として，①「実験空間」②「定数と変数」③「変数の変化方法」をそれぞれ設定するが，これは，辞書の定義にある「現実の問題からモデルを作る」ことをより詳細にしたといえる。

2.2.1　「思考実験Ｉ」(A)準備段階の教育的意義

「思考実験Ｉ」(A)準備段階において，３つの設定を行うが，その教育的意義について１つずつ検討する。

①実験空間

　実験空間を意識することによって，問題の前提条件を確認することができると考えられる。これまで実験を行う枠組み，空間あるいは範囲が明確でなかったために，意識に上ることがなかったと思われる。これを明確化することにより，実験空間そのものを拡大したり，縮小することによって新たな結果を導き出すことができると考える。

　具体的には，変数の範囲を変えること，整数を有理数や実数に変えること，鋭角を鈍角の範囲まで拡大すること，凸角形を凹角形まで広げることなどが，考えられるが，これらは，すべてどのような空間で実験を行っているのか，実験対象を取りまく空間を明確にすることによって可能になると考えられる。

②定数と変数

　実験を行う上で，しばしば受けてきた指摘は，生徒が何をやっているのか意識せず，ただ教師から言われるままに操作を行ってきたことである。こうした点を多少なりとも解消するために，何を変数とし動かし，何を定数として固定するのかを明確にしておくことによって，観察すべき点が明確になると考えられる。また，そのことによって，変数の中の独立変数と従属変数も明確にすることができると考えられる。

　例えば，振り子の実験であれば，重りの大きさと周期が変数となり，独立変数は重りの大きさで，従属変数は周期である。あるいは，三角数の問題の場合は，三角形の1辺に置く石の数が，独立変数であり，石の総数が従属変数である。Polya(1973)は，ゴールドバッハの推測の例を挙げているが，この場合は，任意の偶数が，独立変数であり，2つの素数が従属変数である。[2)]

③変数の変化方法

　変数をどのように変化させるのか明確にすることによって，系統的に変数を変化させることができ，観察時に独立変数と従属変数の間の関係を一層把握しやすくなり，推測を作

りやすくなると考えられる。

例えば，振り子の実験の場合であれば，重りの大きさを変えていくときに，周期の変化を観察することであるから，重りの大きさを一定の間隔で徐々に増やしていくことになる。また，三角数の場合では，三角形の1辺に置く石の数を1つずつ増やしていくことであり，ゴールドバッハの推測の場合であれば，偶数を順番に増やしていくことである。

2.3 「思考実験Ⅱ」について

推測が作成された後，その推測に対して，推測を含む集合の中から要素を取り出し，調べることは実験である。その際，できるだけ集合の特性を反映する要素を選ぶことが必要であり，単に集合から要素を１つだけ取り出して調べてみても，それはさらに確信を強めるだけで証明にはならない。そこで，集合全体を総括する一般化した形で表現し，それに対して実験を行うことによって，証明に導かれることをPolya(1973)は提示している。その一方で，Polya(1973)は，推測を敢えて否定するような厳しいテストを行うことによっても証明に導かれる例を示している。[3)]

ポパー(1971)は，否定することを目的とした思考実験の批判的な用法について述べている。この用法の典型例として，アリストテレスの運動論に対するガリレオの批判を上げている。これ以外の用法として，発見的用法，弁護的用法の2つを上げており,発見的用法の例としては，これ以上分割できないほど小さな部分になるまで分割した場合，分割不可能なアトムの概念に行き着いたことを上げている。さらに，弁護的用法とは，すでにある理論を弁護するために用いる用法である。ポパーは，科学的事実は，常に批判にさらされ，批判に耐え抜いたものだけが暫定的な真実として社会に受け入れられるとする科学観を持っており，そのため，思考実験を弁護のために用いることを戒めていた。この弁護的用法とは，一般に仮説の検証といわれる現物実験に相当する役割を思考実験に用いることであり，そのことに対する彼の批判ととらえることができる。

数学の場合は，最終的には証明することによって真であることが示され，証明は科学における現物実験に相当するととらえると，思考実験は,証明の前段階と見なすことができ,思考実験によって証明への道筋がつけられると考えられる。

そこで,「思考実験Ⅱ」は，確信を強める実験と批判的実験の2種類があるととらえることとする。すなわち，推測はあくまで推測であり，それを単に真として受容するのではなく，批判的に検討する態度を育成すること，加えて数学の場合は，証明を行なうことによって真であることが示されるとする態度を育成することが,「思考実験Ⅱ」を行うことによって期待される。そして，確信を強める実験は，個別の事例で行うだけでなく，より一般的な事例で行うことにより証明へとつながり,また，批判的な実験は，否定・反証するだけでなく，そこから推測を修正や証明へとつながることもあるといえる。

3. 数学する過程のモデルと問題解決過程との対応

上記のように，構成された数学する過程のモデルで，実際の問題解決過程を解釈し得ることを示すことによって，このモデルの妥当性を示す。

3.1　円と円周角の関係

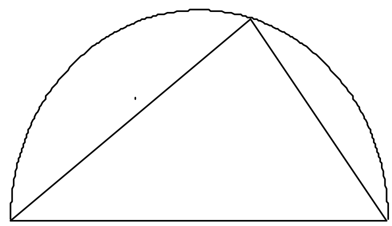


図１

【問題】

半円において，直径の両端の2点A，Bと半円周上にある点Cを，結んだときに できる∠ACBの大きさを求めよ。

まず，生徒は，図上で角度を測定することによって，およそ90°ぐらいであると推測することが予想される。

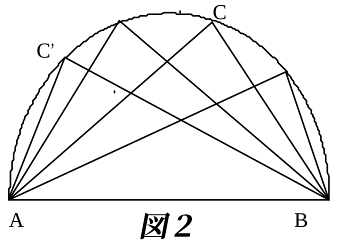


図2

さらに，円周上に別の点C’(図2)をとり，直径の両端と結んでできる∠AC’Bの大きさも調べると，およそ90°であることがわかる。これは，円周に沿って点Cを動かし別の点C'の角の大きさを調べたので，「思考実験Ⅰ」を行ったといえる。この場合，

①実験空間………半円，半円の両端の点A,B，∠ACB
②定数と変数……定数：半円，半円の両端A，B
独立変数：点Cの位置
従属変数：∠ACBの大きさ
③変数の変化方法…点Cを半円周上を動かす

その後，さらに複数の別の角の大きさを調べ，この過程において，どれも90゜になっていることから，

【推測】
半円内の円周角は，すべて90°である。

という推測を作成することは可能であろう。その推測を持ちながら，別の角の大きさを調べることは，その推測を検証するであり，これは「思考実験Ⅱ」にあたる。この実験の結果，調べた角度が90゜であれば推測に対する確信はより強まっていく。この後，推測が論理的に真であることを確かめる段階，すなわち，証明を考える段階に進み，

【証明問題】
半円内の円周角は，90°であることを証明せよ。

が設定される。

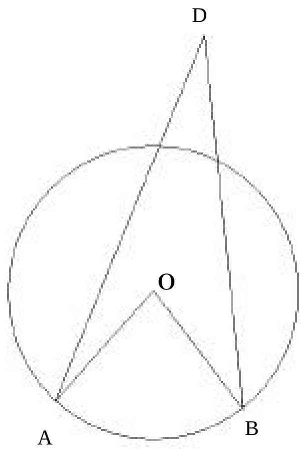


図3

さらに，「円周角は，中心角の半分である」という円周角と中心角との関係を探究する過程で，円周の外の点Dをとり，点A，Bを結んでできる∠ADB(図3)の大きさについて考える場合も，「思考実験Ⅰ」と見なせる。

すなわち，中心角を固定し，これまで円周上にあった点を円周外に動かし，角の大きさを調べることである。この場合は，

①実験空間………円O，弦(弧)AB，円周外の点D，∠ADB
②定数と変数……定数：円O，弦(弧)AB
独立変数：円外の点D
従属変数：∠ADB
③変数の変化方法…点Dを円周外で動かす

と設定される。これは，円周角と中心角との関係を探求する過程では，②「定数と変数」の独立変数が円周上の点であり，③「変数の変化方法」が「円周上を動かす」であったものが変えることによってなされたと見なすことができる。

この新たな「思考実験Ⅰ」によって，実際に角の大きさ(∠ADB)をいくつか調べれば，弧ABの円周角よりも小さいことは容易に推測され，「思考実験Ⅱ」を経て確信を強めることができ，証明へと向かうと考えられる。

3.2　重複組みあわせの問題

次は，重複組みあわせの問題で検討する。

【問題】
みかんが12個ある。これをA，B，C，3人で分けるとき，分け方は何通りあるか。ただし，少なくとも1人3個のみかんはもらえるとする。[4)]

3人とも少なくとも3個は，みかんをもらえるので，残りの3つのみかんを3人で分ける分け方が問題となる。

この問題を解決した後，これを原問題とすると，「思考実験Ⅰ」の準備段階で以下のように設定することができる。

①実験空間………0以上の整数
②定数と変数……定数：分ける人数
独立変数：みかんの数
従属変数：分け方の総数
③変数の変化方法…みかんの数を1つずつ増やす。

実際に，「思考実験Ⅰ」を行うと，新しい問題

【問題】
4個のみかんを3人で分けるとき，分け方の総数は，何通りか。

が設定される。これは，いま解いた問題と同種である。この「思考実験Ⅰ」の結果を得るためには，この問題を解決することが必要となる。さらに，「思考実験Ⅰ」を行い，「みかんの数」を1つ増やし5個にした場合も新しい問題が設定される。そして、3，4，5個のみかんの分け方は，それぞれ，4＋3＋2＋1＝10，5＋4＋3＋2＋1＝15，6＋5＋4＋3＋2＋1＝21であることが求められたとすると，さらに「みかんの数」を一般化しnに変えることによって，(n＋1)＋n＋(n－1)＋・・・＋1と推測される。この式は，1からnまでの連続する自然数の和の公式

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

をもとに，

$$(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2!} = {}_{n+2}C_2$$

と導くことができる。

そこで，次のように，推測を一般化した形でまとめることができる。

【推測】
n個のみかんを3人で分けるとき，分け方は，${}_{n+2}C_2$通りである。
(ただし，1つももらえない場合も分け方として含める。)

これは，分ける人数を3に固定し，「みかんの数」を変化させる「思考実験Ⅰ」によって導かれるが，「思考実験Ⅱ」では，逆にnに3，4，5を代入して，${}_5C_2$，${}_6C_2$，${}_7C_2$を計算することによって，確信を強めることができ，証明へと向かうことになる。また，もし，この段階でその計算結果と一致しなければ，推測は否定され再度推測を作り直すことになる。

さらに，「思考実験Ⅰ」の「定数」と「変数」を入れ替え，「分ける人数」を「変数」にし，3人から1人増やして4人にした場合には，

【問題】
n個のみかんを4人で分けた場合の分け方の総数は，何通りか。

という問題が設定される。

この問題の解を求めるために，3人で分けた場合と同様に考えるために再度nを特殊化して，4，5，6の場合で考える。例えば，特殊化した問題として，

【特殊問題】
4個のみかんを4人で分ける場合の分け方の総数は，何通りか。

を設定して考える。そして，この「みかんの数」を5，6と変え，その結果をもとに，nの場合を考えると，推測

【推測】

$$\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{3!} = {}_{n+3}C_3$$

へと導くことができる。

これは，さらに，「分ける人数」を変数にして5人，6人と1つずつ増やしていき，その後，k人で分けた場合へと一般化を行うと，推測

【推測】
n個のみかんをk人で分ける場合，１個もみかんがもらえない場合も含めると，分け方の総数は，

$${}_{n+k-1}C_{k-1}$$

である

へと導かれる。

また，これは表現を単純化することによって，

【問題】

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

(x_iは，0以上の自然数，nは，自然数の解の個数を求めよ。

や

【問題】
展開式の$(\sum_{i=1}^{k} x_i)^n$　の項の数を求めよ。

へと変えることもできる。

これらは，重複組合わせ(異なるn個のものから,同じものを繰り返し使うことを許して，r個とる組み合わせの数は、${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$)の公式を活用する問題として生徒に与えることもできるが，思考実験を用いることによって生徒自身が導き出すことも可能になると思われる。

4.　結論と今後の課題

数学する過程のモデルを構成し，そのモデルを用いて実際の問題解決過程を解釈し，モデルの妥当性を示した。また，その解釈を通じて，このモデルのもつ意義は次のように考えられる。

まず，「思考実験Ⅰ」は，「推測」を作るための実験であるが，準備段階において３つの設定を行うことにより,対象範囲,観察の視点,変化の方法が明確になり，「推測」が作成しやすくなると考えられる。また，「思考実験Ⅰ」によって，新しい問題も設定され，このことによって，生徒自身で新しい定理を作ることが可能になると思われる。「思考実験Ⅰ」の③「変数の変化方法」によっては一般化や特殊化されることが示された。「思考実験Ⅱ」は，「推測」に対して,確信を強めたり反証することができるが,これは,これまでともすると「推測」を作ることで学習が終了しがちであったが，モデルの中で「思考実験Ⅱ」が位置づけられていることから，批判的に物を見る力を養うことが期待される。そして，「思考実験Ⅱ」を経ることによって，確信を強めて「証明」へ向かうことができるのである。

今後は，生徒自身が，実際の授業場面において，数学する過程のモデルに沿って，彼らにとっての新しい数学を創ることが可能であることを示すことであろうと考えている。

註

1)Lampertは，数学することを推測を生成し，反証したり，検定することとしている。

2)例えば，24は，７＋17と13＋11と2通りの表現ができるので,厳密な意味での従属変数にはなっていない。

3)実験から証明への流れは，Polyaの「帰納と類比」の第2章立体幾何学において,詳しく記述されている。

4)この問題は，実教出版から1997年に発行された「高校数学Ⅰ演習ノート」(p.42)に掲載されている問題を改えて作成した。

参考文献

物理学辞典編集委員会編 (1992). 改訂版物理学辞典，培風館.

化学大辞典編集委員会編 (1963). 化学大辞典，共立出版.

小平邦彦 (1969). 数学の印象，赤摂他 編,学問のすすめ　9　数学のすすめ (pp.272-281)，筑摩書房.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the the solution is not the answer: Mathe- matical knowing and teaching, American Educational Research Journal, 27(1), 29-63.

エルンスト・マッハ (1973). マッハ力学－力学の批判的発展史 (伏見譲 訳)，講談社.

エルンスト・マッハ (1971). 思考実験について，認識の分析 (pp.101-124), (廣松渉・加藤尚武 編訳), 法政大学出版局.
(E. Mach (1926). Uber Gedanken Experimente, Erkenntnis und Irrtum (pp.182-200), Leipzig Verlag von Johann Ambrosius Barth.)

Polya. G. (1973). Induction and Analogy in Mathematics, Volume 1 of Mathematics and Plausible Reasoning, Princeton University Press.

ポパー (1971). 科学的発見の論理 (大内義一，森博 訳)，恒星社厚生閣.

上野健爾，保野博，松本幸夫 (1997). 二十世紀の数学，現代思想，８月号，Vol.25-9，青土社, 30-52.

矢野健太郎 編 (1968). 数学小辞典，共立出版，214.