

# 中学校数学における方程式の立式に関する研究 「翻訳(G. Polya)」の視点による教科書分析を通して

屋宮 俊樹

## 1. 研究の意図と目的

数学では、「等しい」ことを意味する同値の概念は極めて重要で、これらの概念は数学構築の基礎になっている。この同値関係の例として数量の相等関係が挙げられ、方程式は、この相等関係にかかわっている(平岡, 1994)。方程式は、具体的な場面での問題を解決する際に、求めようとしている数量を文字で置き換えることにより、問題解決の有力な方法となる。

しかし、多くの先行研究によって、文章題から方程式を立式する際に困難を示す生徒が多いことが指摘されている。そこで、その打開策として筆者は、Polya の「翻訳」という概念に着目する。この Polya の主張を指導に生かす方法として、教科書の、方程式の立式手順に関する記述を取り上げたい。なぜなら、国立教育研究所の調査から、日本の中学校の教師の 90% 近くが、教科書の例題指導を良く使うことが指摘でき、その中でも方程式に関わる例題の問題解決は、その立式手順を基に記述されているからである。

そこで筆者は、この教科書に記述されている、方程式の立式手順に焦点を当て、そこに Polya の主張に視点を置いた分析を通して、方程式の立式指導に示唆を与えることを、本研究の目的とする。

## 2. 論文の構成

序章	研究の意図・目的・方法
第1節	研究の意図と目的
第2節	研究の方法
第1章	方程式の立式について
第1節	方程式について
1.1.1	方程式の歴史的考察
1.1.2	方程式の数学的考察
1.1.3	方程式の活用
第2節	方程式の立式指導の変遷
第3節	方程式の立式に関する先行研究

第2章	方程式の立式指導の分析枠組み Polya の「翻訳」を 手がかりにして
第1節	Polya の「翻訳」について
第2節	「精神指導の法則( Descartes, R )」 に基づく方程式の立式
第3節	「翻訳」の本質について
第4節	方程式の立式指導の分析枠組み
第3章	方程式の立式手順に関する教科書分析
第1節	教科書分析の方法
第2節	教科書分析の結果
第3節	教科書分析の結果についての考察
第4節	教科書分析による方程式の立式指導への示唆
終章	研究のまとめと今後の課題
第1節	本研究のまとめ
第2節	今後の課題

## 3. 論文の概要

### (第1章)

本章では、立式に関して図を用いることが有効であることを述べた Goodson-Espy の研究や、問題文の記述の仕方を変更することで、方程式の立式が促進されることを述べた坂本洋子の研究を取り上げた。これらの研究に対して、方程式を立式できる生徒や、指導する側にのみ視点をおいているという限界を指摘した。また、方程式について、歴史的に、また数学的に考察し、学習指導要領の変遷についても言及した。

### (第2章)

本章では、Polya の「翻訳」の概念を説明し、その「翻訳」の4つの本質をまとめた。国立教育研究所の調査から、日本の数学の授業は、例題指導が広く行われていることを明らかにし、方程式の立式指導における例題の問題解決は、「方程式の立式手順」という記述を基にしてなされ

ていることを，教科書分析を行う動機として述べた。

「翻訳」の本質 ただし本研究では一次方程式を対象とするため，(d)については省略する。

(a)最初に，問題をよく理解し，未知の量を決めよ。

- ・ 何を求めようとしているのか (未知数)
- ・ 与えられた数は何か (データ)
- ・ 関係によって，未知数とデータはどのようにつながるか (条件)

(b)問題を，最も自然な方法で概観し，それを解けるように受け入れ，条件に従って，未知数とデータの間にある全ての関係を，適切な順序で視覚化せよ。

(c)条件の一部を分離し，同じ量を 2 通りの方法で表現できるようにせよ。そして，未知数間に，方程式を得られるようにせよ。結局は条件を，未知数と同じ数だけの方程式の組を得られるように，同じ数の部分に分離すべきである。

(第 3 章)

本章では，各教科書に記述されている「方程式の立式手順」と「翻訳」の本質 3 つと比較し，内観報告で考察する方法をとった。その結果，教科書に記述されている「方程式の立式手順」には，「翻訳」の本質(c)が全く反映されていないことが示された。また，「方程式」という語が同語反復で使用されていることを指摘することができた。さらに具体例を挙げて，この本質(c)の視点をもつことで，方程式の立式ができるようになることを，筆者の内観報告で確認できた。

以下は実際の中学 1 年の教科書 A 社において記述されている，方程式を立てる手順の一例である。

問題の意味をよく考え，何を  $x$  で表すかを決める。

問題にふくまれている数量を， $x$  を使って表す。

それらの数量の間の関係をみつけて，方程式をつくる。

つくった方程式を解く。

方程式の解が問題に適していることを確か

め答えとする。

教科書分析の結果

翻訳の本質	(a)	(b)	(c)
A社	( ) ( )		
B社	( ) ( )		
C社			
D社			
E社			
F社			

以上のことから，方程式の立式指導への示唆として「教科書に記述されている方程式の立式手順には，同じ量を 2 通りの方法で表現するという視点が欠けているので，指導する際には，このことを強調する必要がある。そのためにも，「方程式」や「等号」の意味を理解することが重要である」ことを導いた。

#### 4. 今後の課題

第 1 に「翻訳」の概念に対する考察を行う必要がある。第 2 に歴史的な比較，諸外国との比較を通す必要がある。第 3 に中学 2 年の「連立二元一次方程式」，中学 3 年の「二次方程式」との接続を考慮する必要がある。第 4 に生徒の実態をふまえ，より実証的に研究を行う必要がある。

#### 5. 主要参考・引用文献

- G. Polya (1962). Mathematical discovery vol. 1. New York: Wiley.
- Tracy Goodson-Espy (1998). The Role of Reification and Reflective Abstraction in the Development of Abstract Thought: Transition from Arithmetic to Algebra, Educational Studies in Mathematics, **36**, 219-245.
- G.ポリア著，柿内堅信訳 (1954). いかにして問題をとくか，丸善株式会社.
- 坂本葉子 (1999). 文章表現が立式困難度と与える影響，第 11 回全国数学教育学会研究発表会資料.
- 文部省 (1999). 中学校学習指導要領解説 数学編.