高等学校数学における証明指導に関する研究
～数学的帰納法について～

小島　泰一

１．研究の意図と目的

本論文の目的は，生徒が主体的に数学的帰納法を学習する意義を感じるための示唆を得，それを元に教材を考えることである。

廣瀬(1975)が指摘するように，数学的帰納法は様々な数学の分野で頻繁に用いられる手法であり，数学を理解する上で欠かせないものである。

しかし，実際の指導では，数学的帰納法を一つの証明技法として学習する状況に留まっていることが多い。これでは，生徒は与えられた問題に対して機械的に技法を適用するだけに留まり，なぜこれを学習するのか，その意義を感じることはない。以上が研究の意図である。研究課題は次のように設定した。

課題 1 数学的帰納法の指導について先行研究においてどのよう議論され，どのような示唆が出ているのかを整理する。(→1 章)

課題 2 数学的帰納法とはどういうものか，数学的帰納法の学習のねらいについて明らかにする。(→2 章)

課題 3 高等学校の数学のねらいや証明指導の役割について整理する。科学や数学における考え方について整理する。(→3 章)

課題 4 以上から「数学的帰納法」の学習を改善するための示唆を得て，それを元に教材を作る。(→4 章)

２．論文構成

３．論文の概要

第 1 章　数学的帰納法を学習する必要性を生徒が感じるためには「帰納的に推論し,演繹的に証明すること」を強調することで解決されるのではないか，という示唆を得ることができた。

塚原(1992)は帰納的パターン発見した予想を数学的に厳密に証明する発見的側面を数学的帰納法が持っているとしている。そして，そのこ

とを生徒に理解させるには他の方法やテクニックで解ける問題はふさわしくないとしている。ここで，その例を考えてみた。

第 2 章　数学的帰納法の原理はペアノの公理の一つであり，この公理によって自然数が定義される。数学的帰納法の原理は自然数の整列性と同値であることがわかる。さらに，自然数だけでなく述語や関数，例えば加法・乗法も原始再帰的関数によって定義できることが分かる。また，高木(1995),ポアンカレ(1938)の文献から，数学の発見の段階において帰納・直観が大きな働きをすることが読み取れる。そして，演繹・帰納・直観，それぞれに必要な役割があり，欠く事ができないものである。推測し，仮説を立て,それを数学的帰納法を用いて証明する「仮説--演繹」の活動が数学的帰納法で証明するときに関わってくることが分かった。

第 3 章　まず，帰納・演繹とはどのような概念であり，数学教育における意味はどのようなものか明らかにした。ここでも，帰納と演繹は表裏一体の関係であることが分かった。デカルト(1950)は問題解決において，まず単純な命題にわけ，直観から他のものを演繹することを指摘している。次に，証明とはどのようなものか，そしてその意義は何かを明らかにした。最後に，証明指導のねらいと問題点について明らかにした。学校数学において証明指導の問題の一つとして，生徒が証明する必要性を感じないことが挙げられている。

第 4 章　数学的帰納法の学習に関して次のような示唆を得ることが出来た。

・帰納的にパターン発見した予想を数学的帰納法によって数学的に厳密に証明することを生徒が理解できるように，他の方法やテクニックで解けるような問題を利用すると失敗する。
・「～を証明せよ」という問題文ではなく，自分で命題間の関係を見つけさせる。
・帰納と演繹は表裏一体である。
　科学・数学の中では帰納・演繹は表裏一体となって用いられる。そこでは，帰納的推理によって発見をし，仮説を立てる。
　それを，演繹的証明する。その時，数学的帰納法が使われる。一連の流れは次の通りである。
　　帰納的操作 → パターン発見
　　→ 数学的帰納法による証明
・新しい定理など，数学を構成する際に数学的帰納法が関わっている。公理的考え方と非常に関連が深い。

これらをもとに指導事例を考えた。具体的には地道に帰納的推論を用いることで数列の一般項を求めることができる問題や，n 次導関数を求める問題などである。

4．今後の課題

今後の課題としては,次の二点が挙げられる。

1. 数学的帰納法の推論形式が理解できていない。
2. 指導順序に問題がある。

数学的帰納法の推論形式が生徒に理解できるるためには，論理学の中の三段論法の理解が前提となる。そのため，論理学や情報処理などの分野から考察する必要がある。よって，当然「命題と論理」の単元と関係してくる。

また，指導順序に関しては高等学校のカリキュラム全体の議論になるので，カリキュラム再編を視野に入れた議論が必要となるだろう。

5．主要参考・引用文献

廣瀬健 (1975). 数学的帰納法(シリーズ 新しい応用の数学 11)，教育出版.

G. ポリア (1959). 数学における発見はいかになされるか1　帰納と類比 (柴垣和三雄 訳)，丸善.

G. ポリア (1959). 数学における発見はいかになされるか2　発見的推論 (柴垣和三雄 訳)，丸善.

高木貞治 (1995). 近世数学史談，岩波書店.

ポアンカレ (1938). 科学と仮説 (河野伊三郎 訳)，岩波書店.

室岡和彦 (1993). 数学的帰納法の学習指導，日本数学教育学会誌，**75**(**11**), 23-30.

塚原成夫 (1992). 高校生の帰納的思考に対する一考察，筑波数学教育研究，**11**(**A**), 43-51.

デカルト (1950). 精神指導の規則，岩波書店.