筑波数学教育研究　第 21 号　2002

研究論文

局所的準体系で演繹の基になる命題の正しさを探る活動

－中学校数学の図形領域における活動の諸相－

Investigative Activity of Truth of Basic Propositions for Deduction in a Local Quasi-system: Its Aspects in Geometry of Junior High-school Mathematics

宮崎　樹夫 (Mikio MIYAZAKI)
信州大学教育学部
(Faculty of Education, Shinshu University)

本研究では，中学校数学の図形領域の論証において，命題の局所的準体系で演繹の基になる命題の正しさを探る活動に焦点をあてた。そして，論証を学習する直前の中学 2 年生 1 名に教授実験とインタビューを実施し，生徒が局所的準体系を構成し，演繹の基になる命題の全称性に疑問を感じた後，全称性を再確立する過程を分析した。その結果，局所的準体系で演繹の基になる命題の正しさを探るが少なくとも 6 つの相を必要とすることを特定し，それぞれの相を生徒の活動で例証した。

This research considered the investigative activity of the truth of basic propositions of deduction in a local quasi-system. Teaching experiments and interview to a 8th grader immediately before leaning a demonstration were implemented. We considered the student's activity that he constructed a local quasi-system of propositions, questioned the universality of a basic proposition for deduction, and re-established it. As a result, it was specified that this activity needed to have at least six aspects, and these aspects were illustrated with the student's activity.

キーワード：中学校数学，論証，局所的準体系，命題の正しさ

１．はじめに

学校数学における図形領域の論証のあり方は，ユークリッド原論の教育的利用の限界／数学の内容面の進歩／真理観等の認識論的変容などに応じて改善され続けてきた。特に，我が国の中学校数学において，図形領域の論証は，系統学習期以降，内容に関する学年間・学校レベル間での増減や移行，指導法・学習環境での様々な改善を伴いつつ，主要な指導内容とされ続けてきた。これは，論証の学習が人に必須な力として論理的な思考力を陶冶すると広く認められていることによると思われる。

一方, 中学生による論証の学習について, 様々な問題が知られている：論証の必要観の欠如，論証構成の困難，論証の価値認識の欠如など。こうした諸問題の解決が試みられてきたが，中学生の学習状況はあまり好転していない(文部省初等中等教育局, 1985,1997)。これは，中学校数学図形領域の論証のあり方が抜本的な改善を要することを示している。

本研究では，中学校数学における図形領域の論証の活動が，数学における論証の活動を可能な限り反映しているかどうかという視点から，命題の組織や体系に基づいて，演繹の基になる命題を探る活動に焦点をあてる。これは次の理由による。数学における論証の活動には，個々の命題を論証する活動に並行して，論証に基づいて命題を組織化・体系化し，最終的に公理化する活動が含まれている。そして，組織化・体系化にかかわる活動は，数学及びそれ以外の営みにおいて「知のととのえ」として必須であると思われる。一方，従来，中学校数学図形領域における論証では，生徒が推論の根拠に迷わないように，「証明の根拠」が予め定められ，この根拠から，既習・未習の命題を演繹し，推論の連鎖をフォーマルに表現することが重視されて

いる。特に，図形領域の論証は多くの生徒にとって総合的な幾何を学ぶ最後の機会である。それゆえ，組織化・体系化の活動を図形領域の論証に可能な限り反映させるために, 本研究では, 命題の組織や体系に基づいて演繹の基になる命題を探る活動に焦点をあてる。

２．目的と方法

本研究の目的は次の問に答えることである。

> 中学校数学科図形領域の論証において，命題の局所的準体系で演繹の基になる命題の正しさを探る活動は，どのような相を必要とするか。

なお，本研究において「命題の局所的準体系」は，特定の領域に属する命題の体系であり，一部の命題の間は演繹的に関係付けされているが, 全ての命題が関係付けられているとは限らないものを意味する。 また,「演繹の基になる命題」は，局所的準体系における他から演繹されない命題を意味する。

前記の問いに答えるために，本研究では,次のように考察を進める。まず，実験及び考察の理論的な枠組みとして，命題の正しさの意味と規準／命題の体系化・公理化・局所的組織化の活動について先行研究の知見を整理する。その上で,「局所的準体系で演繹の基になる命題の正しさを探る活動」について考察する必要性について述べる(3 章)。次に,この活動の諸相及びその必要性を特定するために実施した，教授実験とインタビューの概要について述べる(4 章)。これらの結果に基づいて，6 つの相の必要性を論述し，各々の相を生徒の活動で例証する(5 章)。

３．準備

3.1　命題の正しさの意味と規準

真理論において次の二つの問題が明確に区別される (岩崎武雄, 1968)。一つは，「我々がある命題を真と考えるとき，そのことは何を意味するか」という真理の意味の問題である。そして, 他の一つは,「我々がどういう規準によって命題を真と考えるか」という真の規準の問題である。たとえば，論証指導では命題の真の意味として全称性が重視される。そして，命題の真の規準は，事実との対応性／命題相互の間の整合性である。(なお，本研究では，命題の正しさは，命題の真の一種と捉える。)

一方，数学と経験科学との関わりには，別の正しさの捉え方がある。それは，不確かな命題であっても，それを前提として，十分に確立された法則や事実を演繹できればできるほど，その命題の信憑性が高まるというものである (Hanna & Jahnke, 1993)。この捉え方において，正しさの意味は命題の信憑性であり，正しさの規準は，導出された諸命題の有用性である。

3.2　命題の体系化・公理化の活動

Fawcett(1938)は，数学の相対的真理観を先駆的に着目し，「公理は理論に必要な前提である」という着想を当時の中等学校の論証指導に取り込もうとした。Fawcett の取り組みは，次の点で重要である。すなわち，数学の相対的真理観の着想を数学教育に取り込むことによって，子供たちが自らの判断で前提の内容や表現を定めることができ，その定め方に応じて結論の真偽が変わり得ることを生徒が学んでいる点である。

現代化運動において現代数学の構造が数学教育に強く反映されるようになると，幾何に限らず数学の他領域をも視野に入れて，命題の公理化の営みに着目した研究が展開された。たとえば，Krygowska(1971)は，現代的な公理的概念を可能な限り早期から形成することが必要であるとした。そして，公理的方法の指導法として，“導かれた公理化(guided axiomatization)”を考案し，そのための準備段階・実践上の諸問題, 伝統的な教授法の問題点，公理的方法の指導法の現代的な考え方について指摘した。

我が国では,吉田稔(1971)が，公理の設定について論証者の意思が尊重されるべきであるにもかかわらず，従来の論証指導において公理系の設定のための指導過程が欠如していたことを指摘した。その上で，星型(7, 2)多角形の内角の和を探求する過程で，論証の根拠となる命題群を発生させ，生徒にとっての必要性を重視しつつ，合同条件等の設定を試みた。

また，杉山吉茂(1985)は，公理的方法の考え

として「原理(根拠)を探る(明らかにする)」こと，「仮設(原理，根拠)をおいて考える」ことの 2 点をあげ，特に論証指導において，証明を「根拠(要素)を探るもの」とみることによる価値を指摘した(p.328)。その上で，小・中学校における公理的方法の考えの活用に道を開いた。

3.3　命題の局所的組織化

Freudenthal(1971)は，「活動としての数学」の立場から，幾何学の大局的な公理化や体系化に先立って，局所的な組織化の必要性を指摘した。彼によれば，局所的組織化には 3 つのレベルがある。第一のレベルでは，形や現象が考察の対象とされ，幾何の概念や性質が考察の手段とされる。第二のレベルでは，第一のレベルで手段とされた，幾何の概念や性質が考察の対象とされ，論理学的性質の関係が考察の手段とされる。第三のレベルでは，同様に，論理学的性質の関係が考察の対象となる。特に，第二のレベルでの局所的組織化は，幾何が公理的体系として自己充足的な領域となるための「萌芽」として位置づけられている。そして，局所的組織化の妥当性について，局所的組織化が数学者に広く受け入れられた態度であり，数学に限らず，科学全般における探求の仕方であり，現象を理解・説明する仕方であると指摘した(p.431) [1]。

Freudenthal の考えを論証指導として具現するために，実践的な試みが為されてきた。例えば，我が国では，礒田正美(1987)が，局所的体系化にあたる活動として，「定義する活動」と「命題を系列化する活動」に着目し，それぞれの活動に階層を設定した。その上で，「定義する活動」の学習指導を，中学 2 年で三角形・四角形を定義する活動として実施し，「命題を系列化する活動」の学習指導を，中学 3 年で三角形と平行線の命題を系列化する活動として実践し，達成状況等について考察した。

3.4　局所的準体系で演繹の基になる命題の正しさを探る活動の考察の必要性

第二レベルでの局所的組織化（以下，「局所的組織化」）及び公理的方法の考えは，主に幾何学で「発芽・醸成」され，数学の他領域や数学以外の領域(物理学等)に浸透してきたものである。つまり，幾何学の史的展開が「温床」になったといえる。特に，Kant, I. (1724-1804)がユークリッド幾何学を，人により唯一構成可能なものとした後，非ユークリッド幾何の成立過程において，「経験化(具体化)・仮説化(抽象化)」(近藤洋逸，1994, p.349)され，最終的に，現代的な意味での公理化によって現実との「臍の緒」を断ち切り，自己充足な領域になった(Freudenthal,1957, p.111) [2]。

先行研究で指摘されてきたように，局所的組織化や公理的方法の考えに基づく諸活動は，体系化・公理化の萌芽として可能な限り早い時期から学習者に可能な様式でカリキュラムに位置づけられることが望ましい。一方，我が国の場合，論証の学習初期において，根拠に迷わない等の配慮により，演繹の基になる命題がより予め定められている。そのため，これらの命題を演繹の基に据える理由について生徒は明確な答えを持ち得ない。むしろ，局所的準体系の諸命題の正しさが演繹の基になる命題の正しさに依存することを生徒が探ることによって，局所的組織化や公理的方法の考えに基づく諸活動が具現され得ると思われる。

４．実験の概要

4.1　実験の目的・方法

本研究の目的を達成するにあたって，問題となる活動の諸相とその必要性が，ある程度予想された。本実験の目的は，この予想を修正・洗練し，生徒の活動によって例証することである。

本実験の方法は教授実験と半構造化インタビューである。教授実験を採用したのは，実験で扱う命題や演繹的な説明が協力者にとって未習であり，観察者の支援が適宜必要になると思われたからである。また，半構造化インタビューを採用したのは，演繹の基になる命題の正しさを生徒がどのように確立しようとしているかをできる限り詳細に捉えるためであり，その場に依存した発問や行動を観察者がとれるように，必要最低限の質問項目とその順序を予め定めるにとどめた。

4.2　協力者

論証の学習直前の長野市内公立中学 2 年生 1 名 S(男子；数学の成績(中学 2 年 1 学期)5 段階評定「4」)【以下, “生徒 S”】を協力者とした。これは次の理由による。論証を学習する以前に, 生徒は図形の性質や関係を帰納的に発見・検証する活動や演繹的に説明する活動を経験している。また，論証の学習直前の中学 2 年生は，小学校からこれまでに実験・実測で正しいとした性質や関係すべてに基づいて論証を進めることに抵抗なく取り組めると予想された。

なお，本実験は，学校での論証指導と異なる展開のため，中学校での学習に悪影響がでてしまうことが予想される。そのため，協力者の選択にあたっては，学校での学習状況を考慮し，本実験についての協力者本人及び保護者の理解が得られるよう十分に配慮した。

4.3　局所的準体系と，演繹の基になる命題

本実験では，局所的準体系の諸命題を中学 2 年で学ぶ角の性質や関係に限定した。これは，第一に, 論証の学習直前の中学 2 年生にとって，局所的準体系が複雑になり過ぎないため，第二に，求角問題など比較的取り組みやすい問題で命題の有用性を実感できるためである。

また，演繹の基になる命題を「三角形の内角の和は 180°」とした。この理由は次のとおりである。この命題は，小学校で実験・実測等の帰納的な活動により子供に知りえる範囲で常に成り立つと認められている。実際には，紙にかかれた三角形の図はあくまでも物理的存在であるため，測定の対象が命題の対象と基本的に異なっている。それゆえ，いかに正確に測定しようとしても測定された角度の和が常に 180° になるとは限らない。一方,「正確に測れば 180° になるはずだ」と生徒が考えるのは，測定の対象及び方法への強い信頼によると考えられる。実際，180° にならない場合であっても，測定の対象や方法が必ずしも疑われず，分度器の目盛りでは正確に測れないなど，測定方法の実行に原因が帰着されることが多い。こうした原因による影響を低減するために，本実験では，局所的な体系の構成後に，コンピュータ作図ツールを用いる。この測定では，精度を上げることによって，三角形の内角の和が 180° にならない場合が示される。これによって，生徒は，演繹の基になる命題の正しさが実験・実測で保証し得ない場面に直面することが期待された。

4.4　実験の構成

日付	種類	時間	内容の概要
2001年8月21日	教授実験 1	0:00-77:25	平面図形に関する既習事項の列挙／対頂角・平行線と角の関係の帰納的な学習
	インタビュー1	77:25-97:10	「三角形の内角の和」の全称性の理由
	教授実験 2	97:10-119:17	「対頂角・平行線と角の関係」の練習問題／論証の文章の書き方の簡単な指導
2001年8月22日	教授実験 3	0:00-186:42	三角形の内角と外角の性質・多角形の内角・外角の和の学習／求角の練習問題
2001年8月23日	教授実験 4	0:00-63:35	局所的準体系の図示
	教授実験 5	63:35-125:21	「三角形の内角の和」の全称性の限界の認識とその再確立

教授実験 1 では，三角形及び四角形の種類を名称と図で書き出させ，それぞれの種類が有する性質を文章で列挙させた。この中で明らかに誤りである性質や表現が不十分である記述について，観察者が主に小学校での学習を振り返りながら訂正を促した。次に，対頂角の性質と, 平行線と角の関係について生徒が紙に図をかいて測定し確認した。特に，平行線と角の関係について，生徒はコンピュータ作図ツールで錯角・同位角が角の位置関係であり，平行の場合のみ等しくなることを確認した。

インタビュー1 では，命題「三角形の内角の和は 180°」について，生徒が全称性を認めているか／認めているとすれば生徒の有する規準は何かを捉えることが意図された。そこで，観察者は，なぜどんな三角形でも 180° になると思うのはどうしてか(全称性)について質問した。また，この命題を小学校で学習した際の授業の様子を質問した。

教授実験 2 では，対頂角の性質と，平行線と角の関係の練習問題(教科書)を解決した。その際，論証の文章の書き方【○なので？ (理由)】を観察者が指導した。

教授実験 3 では，三角形の内角と外角の性質・多角形の内角の和・多角形の外角の和を扱った。「三角形の内角と外角の性質」の論証では，生徒が「三角形の内角の和」と，「平角が 180°」に基づいて論証した。「多角形の内角の和」の論証では，観察者の支援を得ながら,一つの頂点から対角線で三角形に区分する方法によって生徒 S は論証した。また,「多角形の外角の和」の論証では，観察者が 5 角形を例として，各頂点の平角の和から内角の和を取り去ると，外角の和が残ることを示すと，生徒 S は一般の多角形について文字式で論証できた。最後に，次の練習問題を解決した：正 12 角形の一つの内角の大きさ／補助線による求角問題／凹多角形の求角問題／三角形やその他の図形での文字による求角問題(市販の問題集)。

教授実験 4 では，局所的準体系の全体を把握させるために，準体系の図示が意図された。そのため，角度の問題解決に使った性質を図と絵で書き出し,●を導くために○を使った場合に,「○⇒●」と矢印で結ぶように指示した。

教授実験 5 では，命題「三角形の内角の和は 180°」の全称性が実験・実測で保証し得ない場面で,生徒がどのように活動するか／命題「三角形の内角の和」の論証後，この命題の全称性をどのように再確立するかを観察することが意図された。そこで，局所的準体系の図に基づいて，生徒が準体系の諸命題の全称性を確立する命題として命題「三角形の内角の和は 180°」を意識した後，観察者がコンピュータ作図ツールで反事例を提示し,「どんな三角形でも 180°になると思うのはどうしてか」について質問した。そして，命題「三角形の内角の和は 180°」を平行線と角の関係で論証し，この関係の全称性をコンピュータ作図ツールで確認した。

５．局所的準体系で演繹の基になる命題の正しさを探る活動の諸相

5.1　演繹の基になる命題の全称性を認める

この相の必要性は次のとおりである。局所的準体系において，演繹の基になる命題の全称性は，この命題から演繹された準体系の諸命題の全称性を確立する。それゆえ，生徒が演繹の基になる命題それ自体の全称性を認めていることが必要である。一方，演繹の基になる命題の正しさを探ることは，この正しさに生徒自身が疑いを感じることによって始まる。この疑いを生じさせるために，教師は，生徒が演繹の基になる命題の正しさをどのような意味でとらえているのか／その意味に基づいて，生徒がどのような規準で演繹の基になる命題の全称性を判断しているのかを把握することが必要である。

実験において，この相は次のように観察された。インタビュー1 において, 命題「三角形の(内)角の和は 180°である」について, 観察者が「なんで正しいの？」と尋ねると，生徒 S は,「いくら三角形をかいて角度測って足しても 180°になった。」(77:59-78:06)と発言し，三角形の図をかき実測した。はじめの二つの三角形の図では，角度が(34,39,94)と(34,78,74)で和が 180°にならなかった。

次に，三角定規の直角を使って直角三角形の図をかき(38,52,90)で和が 180°になり，生徒 S は「なった」(83:29)と発言した。次に，観察者が，どんな形でもなるのかを尋ねると，再び三角形の図を新たにかき始めた。観察者が「どんな形でもそうなると思って言ったんじゃないの？」と尋ねると,「いつのまにかそう思っていた。」(84:13-15)と発言した。このことから，観察者は生徒 S が命題の正しさの意味として全称性を意識していると判断した。

次に，全称性を意識した理由を探るために,観察者は小学校で三角形の角の和を学習した際の様子を尋ねた。生徒 S によると，クラス全員で様々な三角形を手書きし，その図を実測した結果，180°にならない人のほうが多かったという。また，180°にならなかった理由について，生徒 S は,「適当に引いてさ，計りにくいところもあるわけじゃん」(85:00-85:03)と発言し，図の描き方によっては正確な実測が困難になることを指摘した。その上で，観察者が

「180°だと思うのは何故？」と尋ねると,「なんとなく。授業で 180°ってやった」(85:15)と答えた。

また，観察者が 5 つの三角形の図のうち２つだけ 180°になったことを指摘し「たまにだけなるのかもしれない」と発言すると,「そんなことはない！」(89:18-19)「絶対になる」(89:34-35)と発言し，新たな三角形の図で測定したが和は 180°にならなかった。次に，実際に図を測定して 180°にならなかった原因について観察者が尋ねると，生徒 S は，分度器の目盛りを指しながら,「36 とか，こういう棒が引いてないとこでとまったりして，正確にはかれなかったから。」(96:47-56)と答え, 三角形の図によっては, 辺が分度器の目盛りまでとどかないため正確に測れないことがあると指摘した。観察者が「正確に測れれば，なるの？」と尋ねると，生徒 S は力強く「うん！」(97:02)とうなずいた。

生徒 S の発言(84:13-15, 89:18-19, 89:34-35)から, 生徒 S は命題「三角形の(内)角の和は 180°である」の全称性を認めていたことがわかる。そして，生徒 S が全称性を認めたのは，二つの考えによると思われる。第一は,「実験・実測の方法が適切に用いられるならば，その結果は命題に常に一致する」という生徒 S の考えである。第二は,「小学校の授業で命題の全称性が公認された」という生徒の考えである。

第一の考えは，実験・実測の結果と命題の予定調和に基づいている。つまり，実験・実測で命題に一致する結果を常に得られるわけではないが，もし実験・実測が適切に実行されるならば，その結果は命題に常に一致するはずであると生徒 S は考えたのである。

ただし，適切な実行によって実験・実測の結果と命題が一致するという見込みについて合理的な根拠があるわけではない。この意味において，実験・実測の結果と命題の予定調和は素朴であると言える。

また，第二の考えからわかるように，実験・実測の結果と命題の一致について，生徒 S は授業で命題の全称性が公認されたことを認めている。つまり，生徒 S にとって，実験・実測と命題との予定調和は公認されたものでもある。

以上のことから, 局所的準体系を有する以前, 生徒 S は, 命題「三角形の内角の和」について,「実験・実測と命題の素朴な・公認された予定調和」を全称性の規準としていたと考えられる。

5.2　局所的準体系全体を把握する

この相の必要性は次のとおりである。局所的準体系全体を把握することは，局所的準体系の構成後，生徒が個々の論証に基づいて準諸命題の間の演繹的な導出関係を認めることである。この認識は，演繹の基になる命題が準体系の諸命題の全称性を確立することを認める(5.3)ことの準備として必要である。

実験において，この相は次のように観察された。教授実験 3 までに，生徒 S は，中学 2 年の角の性質や関係を教科書に準拠して学び終えていた。ただし，三角形の内角の和については, 小学校での既習事項として認め，論証の対象とはしなかった。次に，教授実験 4 において，観察者は角度の問題を解くために用いた性質を図と文章で書き出すように指示した(00:39 -01:08)。生徒Ｓは，これまでの学習ノートを見返しながら，以下の 9 個の性質を図と文章でかき出した(01:08-20:45)： 対頂角は等しい／平行のとき錯角は等しい／平行のとき同位角は等しい／三角形の一つの外角は外角のとなりにある内角以外の内角の和に等しい／三角形の内角の和は 180°／外角の和は 360°／…角形は角の数より２つ少ない三角形に分けることができる。／～角形の内角の和は 180(n-2)で出る。／一つの内角に外角は二つある。(書き出し順)。次に, 観察者は, これらを性質ごとに切り分けさせた。そして，多角形の内角の和を例にして，論証の前提とした命題●から，導かれた命題■へ矢印をつけ(●⇒■)，他についても同様にするように指示した(20:45-22:26)。

生徒Ｓによる準体系の図では，紙片【三角形の内角と外角の関係】から【多角形の外角の和】へ矢印が向けられていた。この矢印について観察者が「多角形の外角の和」の論証を五角形で振り返り，何を使ったかを質問した(56:51-54)。その結果，生徒Ｓは性質「一つの外角と，その

外角のとなりにある内角の和は 180°」を論証に使っていることを見出し,図と文章で 10 個目の性質として付け加え，この性質から【多角形の外角の和】へ矢印を付け直した。この結果，生徒 S は 10 個の性質からなる局所的準体系を図示できた。この時点で，生徒 S は，この準体系全体を把握できたと考えられる。

5.3　演繹の基になる命題が準体系の諸命題の全称性を確立することを認める

この相の必要性は次のとおりである。局所的準体系全体を把握した段階で，生徒は，どの命題が準体系の諸命題全ての全称性を確立しているのかまで把握しているとは限らない。そこで,局所的準体系の全体的な把握(5.2)に基づいて,生徒が準体系において演繹の基になる命題を特定し，この命題の全称性が準体系の諸命題全ての全称性を確立することを認める必要がある。

実験において,この相は次のように観察された。教授実験 5 において，観察者と生徒 S は,局所的準体系の図をみながら，命題「多角形の外角の和」から論証の道筋を振り返り，そこで用いられた前提を特定するという作業を繰り返した(65:19-66:03)。その結果，生徒 S は，演繹の基になる命題として命題「三角形の内角の和」を特定した。そこで，観察者は，局所的準体系の図において，三角形の内角の和から導かれる命題全体を指で囲みながら，「ここについては，うそだったら困るのはどれ？」と発問した。生徒 S は「これ！」と言って紙片【三角形の内角の和】を指差した。続けて観察者が「これだけ？」と言うと,「うん。」(69:28-44)と答えた。この応答から，生徒 S が，演繹の基になる命題「三角形の内角の和」を準体系の諸命題の全称性を確立するものとして認めたと考えられる。

5.4　演繹の基になる命題の全称性に限界を意識する

この相の必要性は次のとおりである。生徒が演繹の基になる命題の全称性に限界を意識することが，全称性をより確実にする活動の契機となり得る。なぜなら，この命題の全称性に限界を意識することにより，生徒が，この命題から演繹された諸命題全ての全称性を不確かであると感じると考えられるからである。

実験において,この相は次のように観察された。教授実験 5 において，観察者がフェルトペンで鋭角三角形の図を手書きし，生徒 S が実測すると(84,28,72)で 180°を得られなかった。観察者が「これ(紙片【三角形の内角の和】を指して)うそじゃない。」というと，生徒 S は，太い線でかかれた図を三角形と認めながら，線分の幅が分度器の 3 つの目盛りにまたがり測りにくいことを絵にかいて指摘した(80:35-82:00)。そして，フェルトペンの図で，線の内側を使って角度を再度測定するが 180°にならなかった。さらに 2 回測定しなおすが，やはり 180°にならなかった。

ここで，フェルトペンでかいた三角形の図について，観察者が，一つの図で内側と外側に三角形が表されていることについて「おかしくないか」と質問すると，生徒 S は「おかしくない」と答えた(88:58-90:25)。このことから，生徒 S は，実験・実測の結果と命題が一致しない原因を，フェルトペンの図に分度器(測定の道具)を適切に使えないことに帰着させていると観察者は判断した。

そこで，測定の道具の使用に関する原因を低減するために，観察者は，コンピュータ作図ツールの使用を提案した。生徒 S は，測定機能による(30.9, 42.3, 106.8)の和を計算して 180°を得た。次に，観察者が測定精度の設定を小数第 3 位に変更し，180°にならない図を提示した。生徒 S は自分で計算し，180°にならないことを確認した(31.218+44.114+31.218=179.999)。続いて，生徒 S は三角形の図を変形させ，他にも 180°にならない場合が数多く現れることを確認し,「ときどき 180°にならないけど，およそ 180°になる」(100:31-38)と発言した。

コンピュータ作図ツールという，生徒 S にとって極めて信頼できる測定道具の使用をもってしても，命題に一致しない結果が得られた。つまり，生徒 S にとって極めて正確であるはずの事実が命題と一致しなくなってしまったのである。この結果，生徒 S は，正しさの規準「実験・実測と命題との素朴な・公認された予定調和」

を疑問視するようになったと考えられる。そうであるとすれば，生徒Sは，この規準による命題「三角形の内角の和」の全称性に限界を意識し，それによって，準体系の諸命題全ての全称性を不確かと感じるようになったと考えられる。

5.5　演繹の基になる命題の全称性を再確立する必要性を認める

この相の必要性は次のとおりである。演繹の基になる命題の全称性に限界を意識することは，全称性を再確立する契機になり得るが，必ず再確立に結びつくとは限らない。むしろ，限界の意識に伴って，局所的準体系全体を放棄する可能性さえある。一方，生徒は，局所的準体系の構成過程で，諸命題を実験・実測で確かめる／諸命題によって様々な問題等を解決できるという肯定的な経験を有している。この経験により生徒は演繹の基になる命題の信憑性を認めていると考えられる。それゆえ，肯定的な経験をもたらした局所的準体系を保持するために，生徒が演繹の基になる命題の正しさを再確立する必要性を認める可能性がある。

実験において，この相は次のように観察された。教授実験５において，生徒Sが「三角形の内角の和」の命題の全称性に限界を認めた後，観察者が，局所的準体系の図を指しながら，「これ(三角形の内角の和)がうそだと，みんなうそになっていっちゃうでしょ。」(95:55-58)，「これ全部だめになっちゃう，勉強したことが」(96:12-17)と発言すると，生徒Sは「あ〜，うそ教わっちゃった。」(96:22-24)と笑いながら発言した。この発言から，生徒Sが局所的準体系全体を放棄せざるを得ないと感じたことがわかる。その反面，生徒の発言(96:22-24)までに，生徒Sは，いくつかの三角形の図において命題「三角形の内角の和」に一致する結果を得ていた。また，観察者は，こうした事実とともに，多角形の外角の和や内角の和などの性質を使って，練習問題を解決できたことを振り返った。こうした活動に基づいて，生徒Sは自らの肯定的な経験を想起し，局所的準体系を保持するために命題「三角形の内角の和」の全称性を再確立する必要性を認めていたと考えられる。

5.6　より確実な規準と論証に基づいて演繹の基になる命題の全称性を再確立する

この相の必要性は次のとおりである。演繹の基になる命題の全称性を再確立するために，生徒には，その命題の前提の全称性を探る可能性が残されている。この場合，全称性の規準は，演繹の基になる命題の全称性に限界をもたらした規準よりも，生徒にとってより確実な規準であることが望ましい。なぜなら，限界をもたらした規準に基づいて，新たな前提の全称性を認めても，同様な限界が生じ得るからである。

実験において，この相は次のように観察された。生徒Sは「あ〜，うそ教わっちゃった。」(96:22-24)と発言した後，何をしてよいのかわからない様子であった。そこで，観察者が，実験・実測で調べる方法と，理由で説明する方法とがあることを指摘した。そして，これまでの活動に基づいて前者の限界を振り返り，後者に取り組んでみることを勧めた。生徒Sは，求角問題で補助線を引いて解決したことをノートで振り返り，三角形の底辺に平行で他の二辺に交わる直線を引き，その直線を定規で頂点にむけて平行移動し，頂点を通る状態にした直後，「わかった」「だから 180°になるんだ」と発言した(116:6-29)。そして，観察者に平行線と錯角の関係で命題「三角形の内角の和」を説明した。観察者が「その形だからできるんじゃないの？」と質問すると，生徒Sは他の形をかき，頂点を通り底辺に平行な直線を引いて同様に説明した(117:8-21)。観察者が「平行線ってそこにひかなきゃだめなの？」と質問すると，生徒Sは，他の頂点で同様に平行線を引いて説明できた(117:21-119:55)。続いて，観察者が局所的準体系の図において，命題「三角形の内角の和」の前提を問題にすると，生徒Sは紙片【錯角】を【三角形の内角の和】の前提に位置づけ，矢印で結んだ。(資料参照)

次に，命題「平行線と角の関係」の正しさについて観察者が「いつも正しいの？」と質問すると，生徒Sは，コンピュータ作図ツールで図を変形しながら，錯角の測定値が小数第３位の測定精度で常に一致することを確認し，観察者

にその結果を報告した。

このように，生徒Sは，命題「三角形の内角の和は 180°」の全称性を再確立するために，観察者の助言によって，命題「平行線と錯角の関係」を前提として論証し，三角形の形や補助線のひき方に論証が依存しないことを確認することによって論証の一般性を高めた。その上で，コンピュータ作図ツールの結果が命題「平行線と錯角の関係」に全て一致することを確認した。この時点で，作図ツールによる生徒Sにとっての事実と，命題「平行線と錯角の関係」とが現実に一致したことを規準として，生徒Sは命題「平行線と錯角の関係」の全称性を認めたと考えられる。

正しさの規準「実験・実測と命題との現実的な調和」は，「実験・実測と命題との予定調和」より生徒にとって確実である。つまり，生徒Sは，正しさに限界を認めていた命題「三角形の内角の和」を論証しただけでなく，その論証の前提「平行線と錯角の関係」の全称性をより確実な規準に基づいて認めることができた。そして，この認識と論証により，命題「三角形の内角の和」の全称性を再確立できたと同時に，局所的準体系を保持できたのである。

６．結論・意義・今後の課題

本研究の結論は次のとおりである。

中学校数学科図形領域の論証において，局所的準体系で演繹の基になる命題の正しさを探る活動は，少なくとも次の6つの相が必要である。

生徒が，

- 演繹の基になる命題の全称性を認める。
- 局所的準体系全体を把握する。
- 演繹の基になる命題が準体系の諸命題の全称性を確立することを認める。
- 演繹の基になる命題の全称性に限界を意識する。
- 演繹の基になる命題の全称性を再確立する必要性を認める。
- より確実な規準と論証に基づいて，演繹の基になる命題の全称性を再確立する。

本研究の意義は次のとおりである。先行研究では，局所的組織化や公理的な方法の考えに基づく活動が可能な限り早期から学校数学に導入されるべきであると指摘されてきた。特に，中学校数学の論証指導について，公理的な方法の考えに基づく活動の可能性・有効性が考察されてきた。一方，本研究は，論証の初期の学習に焦点をあて，中学生が，局所的準体系で演繹の基になる命題の正しさをどのように探るのかについて実証的にアプローチし，全称性の意味と規準という視点によって，活動の諸相を特定した。また，小学校算数科での既習事項が中学校数学科で論証の対象とされるなど，「直観幾何」と「論証幾何」に隔たりや不連続があることがしばしば指摘されてきた(たとえば，Hansen(1998))。本研究によって，論証の初期の学習において，教師の支援を得ることによって，生徒が小学校での既習事項を認めて局所的準体系を構成し，その準体系で演繹の基になる命題の全称性を探る可能性を示した。このことは，中学校の論証の学習が小学校の図形の学習に対して，学習者にとって“連続的に”位置づく可能性を示唆していると思われる。

今後の課題は次のとおりである。

- ◆ 生徒が局所的準体系を全体的に把握する必要性を認めるために，どのような手立てが必要・有効か。
- ◆ 授業など社会的な要因が深く関与する場面において，本研究で特定された諸相が特定されるか。他の諸相が存在しないか。

注

１) Volkmann, P. (1856-1938)は，物理学の概念体系はビルのように，ボトムアップで生み出されるようなものとみなされるべきではなく，むしろ「アーチの建設」であり，科学的原理の基礎にかかわる分析は，その発展において比較的後の段階であると指摘する(「遡及的整理」retroactive consolidation)(Corry, 1999, p.102)。

２) これは，Freudenthal(1957)による「幾何学の基礎(第8版)」(Hilbert, D.)への解釈「Hilbertによって現実と幾何との“へその緒”が断ち切られた。」(Bos, 1993, p.56)に基づく。

引用・参考文献

Bos, H. J. M. (1993). ‘The bond with reality is cut’: Freudenthal on the foundation of geometry around 1900. *Educational Studies in Mathematics*, *25*, 51-58.

Corry, L. (1999). David Hilbert between Mechanical and Electromagnetic Reductionism (1910-1915). *Archive For History of Exact Sciences*, *53*, 489-527.

岩崎武雄 (1968). 真理論. *岩波哲学講座：哲学・存在と知識* (pp.279-309). 東京: 岩波書店.

Fawcett H. P. (1938). *The nature of proof*. NCTM Year Book, New York: Columbia University Teachers College.

Freundethal, H. (1957). Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie - zugleich eine Besprechung der 8. Aufl. Von Hilberts Grunglagen der Geometrie. *Nieuw Archief voor Winkunde*, *5* (3) 105-142.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *3*(1), 413-435.

Hanna,G. & Jahnke, H.N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 421-438.

Hansen, V. L. (1998). Changes and trends in geometry curricula. In C. Mammana & V. Vilani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.235-261). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

礒田正美 (1987). 体系化の立場から見た中２の図形指導. *日本数学教育学会誌：数学教育*, *69*, 323-332.

近藤洋逸 (1994). *近藤洋逸数学史著作集［1］幾何学思想史*(佐々木力[編]). 東京: 日本評論社.

Krygowska, A.Z. (1971). Treatment of the axiomatic method in class. In Servais, W. & Varga, T.(eds.) *Teaching school mathematics* (pp.124-150). London: Penguin-Unesco.

文部省初等中等教育局 (1985). *教育課程実施状況に関する総合的調査研究：調査報告書-中学校-数学(MESC-3-8517)*. 東京: 文部省.

文部省初等中等教育局 (1997). *教育課程実施状況に関する総合的調査研究(中学校)について*. 未出版物.

杉山吉茂 (1986). *公理的方法に基づく算数・数学の学習指導*. 東京: 東洋館.

吉田稔 (1971). 論証指導の一考察. *数学教育ゼミ(近代新書レポート)*, 90-93.

※　本研究は，科学研究費補助金【萌芽的研究：課題番号 12878023(研究代表者：岩永恭雄)】【基盤研究(C)(2)：課題番号 13680197】の支援を受けて行われた。

【資料】