筑波数学教育研究　第 21 号　2002

研究論文

教授学的変換による無理数の学習指導について
－中学校数学における「行為に埋め込まれた知識」の機能－

Conduite de l’apprentissage es nombres irrationnels selon une transposition didactique

小原　豊(Yutaka OHARA)
筑波大学大学院教育学研究科
(Programme de doctorat de la faculté de didactique, Université de Tsukuba)

本稿の目的は，無理数の学習における"極限認識への直面"という問題について，教授学的変換の視点からその指導上の対処を検討することである。その為に，まずシュバラール(Chevalard, 1985)及びブロッソー(Brousseau,1997)の論考を基に教授学的変換の過程を概括する。次に，この枠組みによって中学校における無理数の学習指導上の論点を整理し，その困難への対処の在り方を調整という視点から考察する。結論として，中学校段階における"極限認識への直面"に対処する上で，(1) 教授学的変換の所産としての「行為に埋め込まれた知識」による調整，及び(2) 数学的な実在への関心の維持による調整，という 2 つの方策を示唆する。

L’objet de cet article est traiter le problème qui consiste à "faire face à la reconnaissance des limites" dans l’apprentissage des nombres irrationnels du point de vue d’une transposition didactique. A cet effet, nous résumerons d’abord le processus de transposition didactique fondé sur les théories de Chevalard (1985) et de Brousseau (1997). Puis nous étudierons la difficulté de l’apprentissage des nombres irrationnels au collège, et envisagerons des méthodes qui pourraient permettre de surmonter ces difficultés. Pour conclure, nous suggérerons deux possibilities de solution pouvant faciliter la reconnaissance des limites au collège, qui sont l’ajustement par l'entretien de l’intérêt à l'existence mathématique en premier lieu, et en second, l’ajustement par le "theorem-en-acté " comme produit de la transposition didactique.

キーワード：無理数，教授学的変換，「行為に埋め込まれた知識」，調整

1．はじめに

学校数学においては，生徒の発達段階やカリキュラムの全体構成を踏まえた配慮から，数学的あるいは認識論的に深い吟味をせずに省いている内容や，直観的な認識にまかせて看過している内容が多々存在している。しかし，生徒がこれらの内容の数学的な深遠さに関心をよせた場合，教育的な問題が生じる。その典型と考えられるのが，中学校数学における無理数の指導である。例えば，ある中学 3 年生が「$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ は, 両方とも無理数で, $\sqrt{2}$ ＝1.41421356.....，$\sqrt{3}$ ＝1.7320508.......と小数点以下，無限に続いていくなら，$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ の計算は，小数点以下の数を無限に計算するのだから，いつまでも答えが出ないよ」と，悩んでいたとする。我々は，この生徒をいかに支援すべきであろうか。これは，旧くて新しい問題である。ルベーグ積分で知られるルベーグ(Lebesgue,H.)は，L'Enseigne ment Mathéatique 誌上において，数学学級で無理数の議論を避ける傾向を批判し，中等教育は有理数と無理数を正確に扱わない偽善的なものだと指摘し，「無理数の話は, ある意味で無理数を論じることを避けるためになされるようなものである」(Lebesgue, 1956, p.18)と論じている。

また，生徒達のもつ無理数の概念の脆さについても指摘されてきている。例えば，フィッシュバインら(Fischbein, et al. 1995) は第 9，10 学年と大学生を対象に，無理数の概念をいかに理解しているかを，彼らの極限への信念や分類テストによって調査した結果，生徒らの無理数の理解の脆さを指摘している。

上述の問題と向き合う為には，自然科学としての数学における無理数と，教科としての学校数学における教材である無理数との関係を教授学的変換という視点から把握する必要がある。

本稿の目的は，無理数の学習における“極限認識への直面”という問題について，教授学的変換の視点から，その指導上の対処を検討することである。その為に，まずシュバラール(Chevallard, 1985, 1988) 及びブロッソー

(Brousseau, 1997)の主張に基づいて教授学的変換のプロセスを概括する。次に，無理数の学習指導をその枠から整理して，その学習指導の困難さに対処する方法論を，認識の進化における「克服」と「調整」という 2 つの視点から考察する。

2．教授学的変換とその過程

我々が学校数学における教育内容の構成と配列を行う為には，専門数学の内容のもつ公理的な系統を参照しつつも，算数・数学科の目標を達成し，児童･生徒の人間性の陶冶を意図する，いわば教育的系統性に依拠せねばならない。

長谷川栄(1995)は，ルソーの「エミール」の第三編における，あらゆるよい教育の根本原則を引用した上で，「学問研究の上では，ある一定の対象をそれに即した方法で研究し，そこから真なる一般的命題の獲得が求められる。しかし，教授の文脈では，学問の真なる一般的命題について教えるのではなくて，学問を愛する心や学問を学ぶ方法を教えることが大事だとされる」と主張している。この主張は，傾聴に値する。教育的な価値実現を目指して，ある知識体系から，教授内容を選定，確立する操作は，教授学的変換という枠組みで捉えられ，数学教育においてもその在り方が議論されている(溝口 1996, 小原 1999, 2001a, 2001b)。教授学的変換の過程は，社会学的，心理学的，人類学的な視点などから様々に模索されている(Arsac,1996)。本稿では仏教授学におけるシュバラール(Chevallard,1985,1988) 及びブロッソー(Brousseau, 1997)の論考を手掛かりにする[1)]。

シュバラールによれば，教授学的変換とは，専門科学の体制(institusion)で利用していた知識を，学校社会の体制で伝承しやすい内容形式へと変える働き(travail)であり，学究的な対象(利用する知識)から，指導の対象(伝承すべき知識)を選定し組織する一連の操作を指す(Chevallard,1985,1988)。その過程は，以下のような図式(schéma)で整理される。

→学識の対象　→教育すべき対象　→教育する対象
(objet de savoir)　(objet à enseigner)　(objet d'enseignement)

図 1 教授学的変換の進行
(Chevallard, 1985, p.39)

「学識の対象」とは，教科の母体となる学問分野において整理された知識である。数学的知識の場合，その大半は，数学者達の審美観や創作意欲など，個人的な文脈において構成される。実際には社会的な交渉を通しての創発が多いが，教授学的変換の起点は，数学者によって人格化，文脈化された状態の数学的知識とされる。そして，この知識をより多くの他者(数学者)と共有し，体系化しようとする場合，その形式化や公理的な整理を通して数学者の共同体(数学会)での承認を得ることが必要となる。この過程で，数学者達は知識構成を促した自らの個人的な動機や，成功に到るまでの過去の失敗歴などを上手く隠していく。即ち数学的な知識(savoir)を脱人格化(dépersonnalisation)，脱文脈化(décontextualisation)した状態に変換する［過程Ⅰ］。ここまでは数学者達の作業といえる。

「教育すべき対象」とは，望ましい教育を実現する基準となる教育内容の組織であり，数学者が生産した数学的知識を学校教育の目的を達成する為に，教育行政に携わる専門委員らを中心にその変換が進められる［過程Ⅱ］。

「教育する対象」とは，教科書や資料集などの具体的な教材であり，基準として定められた教育内容を再文脈化し［過程Ⅲ］，生徒達が自らの経験や既習事項を基に意味づけられるように，教師によって各教材の擬文脈化が試みられ，擬人格化が図られていく［過程Ⅳ］[2)]そして，生徒達は自らの知識を整理し，社会文化的な生産活動に関与できるように，獲得した知識を再び脱文脈化や脱人格化する[3)]。

以上の過程をより体系的に図式化すると，図 2 のように表せる。

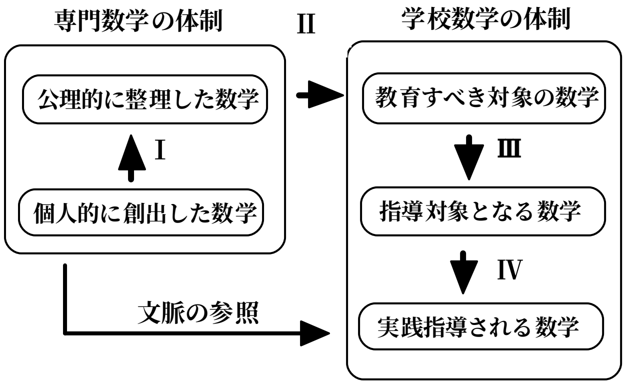


図 2　教授学的変換の過程

このように，教授学的変換は基本的に，知識に自らの個性を関与させたり人間的な属性を認めたりする「人格化」とその逆操作の「脱人格化」，知識が存在する必然性や意味を与える「文脈化」とその逆操作の「脱文脈化」という各々２つの操作の往復を通して段階的に進んでいく過程として特徴づけられ，数学的知識は数学者の共同体や学校社会の体制の中でその様式を次々と変えていく。また，このシュバラールの枠組みを哲学的な視座から補説したカンとキルパトリック(Kang & Kilpatrick 1992)は，人間の認識を対象の人間的属性を認める［I－You 様式］と己の目的の為に認識対象を利用する［I－It 様式］に分けている。そして教授学的変換を，知識を共有する上でこの２つの様式の間を往復し，数学的な知識の脆さ(fragility)を統制する方法だと特徴づけている。

シュバラールの論考に対して，例えばフロイデンタール(Freudenthal)は，ペアノによる自然数の公理化などを事例に，数学史の背後にある文化的背景の複雑さや，市民(citoyens)の大多数が学ぶ学術的ではない数学の度外視を論難している(Freudenthal,1986,p.324)。しかし，この教授学的変換による大局的な教材化の手順は，我々が数学を創るプロセスと，整理・体系化するプロセス，文化伝承的あるいは陶冶的に数学を指導するプロセスを区別して数学教育を論じる上で，簡潔かつ基本的な枠組みの 1 つとなる。

３．教授学的変換による無理数の教材構成

上述の枠組みによって，無理数の教授学的変換を考えてみる。歴史的には，無理数の存在は初期のギリシャ数学(Pythagoras 学派)の エウドクソス(Eudoxus)らによる比で既約不能線分に関わる問題の文脈などで先ず認識された後に，作図による存在保証という考え方に基づいて，幾何学的な直観を借りて量(megethos)の問題として再文脈化される［過程 I 1］。そして長い年月を経て，解析学上の要請から実数を厳密に構成する為に，デデキント(Dedekind)による切断の方法や, カントル(Cantor) の コーシー列による方法など，幾何学的直観の助けを借りない論理的に精緻な方法を採ることによって，再び脱人格化，再文脈化が図られる［過程 I 2］。デデキントやカントルらを実数論の構成へと促した個人的な脈絡は，自叙伝で述懐されることはあっても，構成した数学自体においては整理された形式の背後に隠れてしまう。そして教育行政官やカリキュラム開発者は，累乗の逆演算について閉じた数系への拡張や，代数方程式の解の添加(存在性の検討)，位相的に稠密な集合の完備化など，数学的な見方や考え方を学ぶのに相応しい教材であると判断した上で，この無理数を教材として採択する［過程II］。そして中学校段階において，特に平方根数の形で無理数を導入し，ピタゴラスの定理や 2 次方程式の指導を扱う前後のカリキュラム上に位置づけることによって, 再文脈化を図っていく［過程III］。更に，これを数学教師が，面積や長さなどの量を上手く用いて，正方形の対角線の長さを求める必要が生じる状況などを教室に設定し，擬似的な文脈化を図っていく［過程IV］。

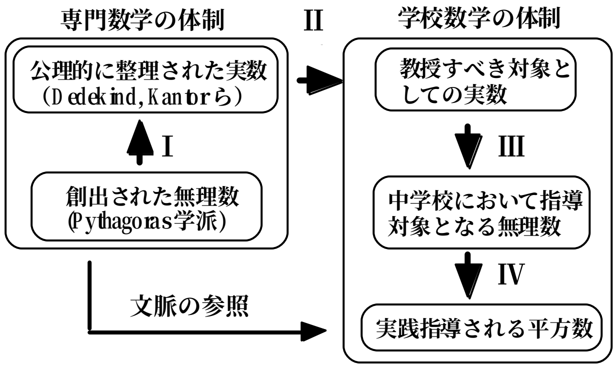


図 3　無理数の教授学的変換

我が国では，無理数は中学校第３学年において平方根数の形で導入されているが，以上の過程を踏まえて, その指導実践における"極限概念への直面"という問題を検討していく[4]。

無理数やその四則演算の定義においては本質的に，極限認識が介在することが指摘できる。生徒が「無限小数で表わされる数」として新しく構成した無理数を，既知の有理数同様に不易な形式で計算処理したいと願うとき，その実現には，電卓などによる近似値計算や数直線をモデルとして得られる感覚的な連続性に頼らざるを得ない。これは，中学校段階の生徒が，無限小数が無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ であり, 絶対収束することからその四則が可能となることを理解し得るか(教育可能性)，またその意義はあるか(教育的価値)という問題でもある。教授学的変換の過程から捉えると，数学者の共同体における過程Ⅰで目指された厳密な論理性が，学校数学の体制では(少なくとも中学校段階では)一義的には扱われず，過程Ⅱによって学校教育の狙いを実現する為に，2 次式で表現される世界の記述という実用的な価値や，数概念の拡張の体験による陶冶的な価値の実現が目指され，更に過程Ⅲによって生徒の発達段階を考慮し，習得が可能なものに変換されていると考えられる。

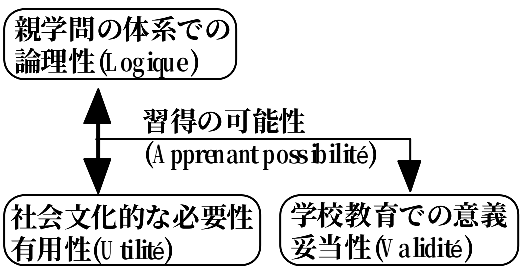


図 4　過程Ⅱ，Ⅲにおける要因

また過程Ⅳの際に，生徒は，無理数とその演算にリアリティを得て，その実在性を認める上で，数直線や面積図などを必要としており，通常の指導では，これらのモデルを媒介して進められる。生徒は数直線上の数の分布状態，即ち位相構造から，そこに並んでいる隙間のない全ての点と同等なものを(実)数として認識するよう求められている。そして，この隙間を埋める新たな数においても，有理数までで成り立った四則演算や各計算法則が成り立つと見なしていく。例えば，実数 a，b の近似有限小数を a_i, b_i とするとき, 加法や乗法を数直線上での操作による原点からの変位と捉えて 2数の和 a_i+b_i や, 積 $a_i b_i$ を数直線上に近似小数として常に表示可能だと考える[5]。

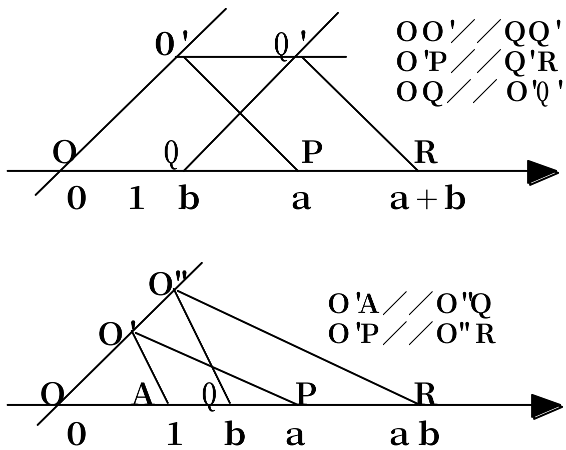


図 5　数直線を媒介した加法と乗法

これらの作図を通して，和，積の近似値が近似値の和，積となることを図形的に取り扱う。この指導は，生徒が数直線をモデルとした幾何学的実数論を直観的に認めてくれる限りにおいて，適切なものである。しかし，第 1 節で述べたような，無限を生成的に考えて，$\sqrt{2}$

1.41421356......や，$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$　$\sqrt{6}$ などの記述を

繰り返し，それらの実在性や計算可能性を確信できない生徒については，学習指導上の問題が生じる。数学的には，無理数やその演算を厳格に捉える上では，直線や実数とは何かを明確に定義せねばならず，実数の連続性の公理を認めて数直線上の点を無限小数と 1 対 1 対応を図る必要が生じてくる。学校数学の体制においては，この問題にいかに対応できるだろうか。

無理数の学習指導上，頻繁に指摘される問題点として，根号のついた数式を技巧的に処理する技能の習熟に偏りがちという傾向がある(例

えば Arcavi, et al.1995)。これを教授学的変換の視点から捉えると，教師が授業実践で指導対象の擬文脈化［過程Ⅳ］を図る際に生じる現象と捉えられるが， この現象の一因として，どこまで無理数に関する数学的な論理性を追究すべきかに教育的な確信をもてないことが考えられる。以下，この問題について更に言及していく。

４．無理数の学習指導の検討

４.1. 認識の進化における連続と断絶

本節では，前節までの教授学的変換の検討が，生徒の認識の進化をより適格に統制することにいかにつながるかを考察していく。

生徒のもつ認識の進化を探究する上で，その断絶性や飛躍性に着目する概念変容のアプローチと，連続性や暗黙性に着目する概念発達のアプローチがある(West & Pines,1986)[6]。そこで，生徒の認識がいかに進化するかを以下の図 4 で概括する。

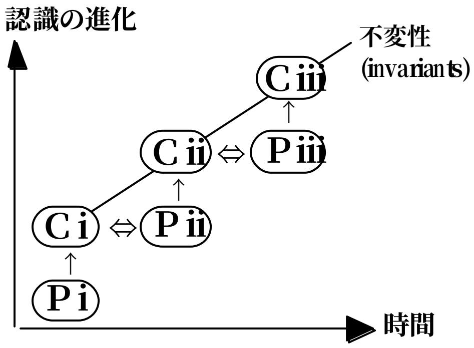


図 6　認識の断絶性と連続性

生徒がもつある素朴(Primitif)な考え［P1］が，数学的概念(Conception)［C1］ に変容［↑］するとき，新たな数学的概念［C2］の土台となる素朴な考え［P2］に対して，［C1］ が乗り越えるべき障害として機能［⇔］する。また別の視点でみると，数学的概念の進化がそもそも形式性など，ある不変な性質(invariant)を保持した上での営みと捉えられる。“ 極限認識への直面 ”の議論としては，Cｉと Cii の断絶やCｉのPⅱ への障害としての機能を強調する「克服」と，Cｉと Cii の連続性を強調する「調整」の，２通りの方向が考えられる。概念変容の視点に立った「克服」の議論については，溝口達也(1995)が既に論じていること，また筆者自身が一貫して概念発達の立場を採ってきたことの 2 点から，本稿では以下「調整」について検討していく。

また「調整」の検討に先立ち，2 つの問題に言及しておく。第 1 に，「調整」の議論は，溝口のいう極限に関する認識論的障害の克服を絶対的に「回避」するものではない。生徒が極限の深遠さに気付いた場合，中学校数学科の目標を省みて「克服」が望まれるのか否か，また可能であるのか否かを問うとき，その時期を考えねばならない。即ち，「調整」とは「克服」を適切な時節へと統制することを意味している。

第２に，困難の度合いの問題である。我々が指導内容を単に簡潔化，細分化して与えるのではなく，適度な困難，障害を乗り越えることに教育的な意味を見い出す(中島 1981, 溝口 1995)のであれば，問題はその"適度さ"の判断にこそある。この判断は，教授学的変換の過程Ⅲにおいて規範的に行われ，カリキュラムポリティクスの視点も必要となる困難な論点の１つであり，本稿での根底的な検討は難しい。しかし，この問題は，前述のように，無理数の学習においてどのように極限認識に触れればよいのかという形で過程Ⅳに現れてくる。故に，以下では，中学生３年生一般にとって極限認識は "適度な"困難ではなく，微積分を学ぶ要請を受けて，極限を明確に学んだ後に議論する方が発達段階からみて健全であると暫定的に判断した上で議論を進めていく。

4.2. 「調整」について

本項では「調整」について，暗黙的，明示的の２通りの在り方について述べる。先ず，暗黙的な「調整」について，(1)それが「行為に埋め込まれた知識」の機能によって進められること，(2)その「行為に埋め込まれた知識」は，教授学的変換によって構成されることを述べる。

生徒は，無理数の処理において暗黙的に極限認識を用いている。しかし，この思考における"隠れた機構"は，単に顕在化すればよいという性格のものではない。ルネ・トム (Ren・Thom, 1974) は，数学教育現代化の動向を反省する提

言[6]において，子どもの心理現象の中に既に現れている現代的な数学を(指導者が)知っておくことは重要であると述べた上で，子どもの心理現象の中に潜む機構を顕在化する意義を問い直し，集合論を事例に以下のように述べている。

「思考活動の形式的な定義をはっきりと意識すれば，そのためにその活動を混乱させる可能性がある。その活動は，それまでは理論なしでずっと効果的に機能していたのに(p.24)」

彼は，数学教育においては，厳密性の問題よりも感覚，意味の構成の問題を扱い，数学的対象の「存在論的正当化」の問題を扱う方が適切であることを主張している。これは，数直線などのモデルによる幾何学的な確認によって，極限認識の厳密さを「調整」する指導を妥当化するものと考えられる。

上述のように，生徒が無理数やその演算の論理的な厳密さを迂回しつつ計算できるのは，数直線に媒介された連続性の感覚や，有限小数による近似による位相的な感覚が暗黙的に作用しているからといえる。この感覚的な判断は "近似値は真の値と同様に計算できる"，また "数直線上にプロットできる数は存在する" などの有理数までの学習で不変に用いてきた認識であり，ア・ポステリオリに生じた「行為に埋め込まれた知識　(theorem-en-acte)」と解釈できる[7]。

生徒は，既に小学校において，$\frac{1}{3}$や$\frac{1}{7}$のような単位分数を数直線上にプロットしたり，曲線図形である円の面積や円周を求める上で極限認識に触れ，超越数πを学習している。島田茂(1990)は，有理数と無理数を論じる上で以下のように述べている。

「小学校や中学校で概数，概算や近似値を話題とするのは，その実用的な必要性の他に，このような演算の連続性に対する直観的，素地的な扱いという理論上の含みもあると考えてよい(p.2)」

と述べており，小学校からカリキュラムに組み込まれている数の概括的な把握や数直線上での幾何学的な存在確認が，極限移行を支援する素地であることを指摘している。このようなカリキュラムを構成している教授学的変換は，積極的にみれば，生徒の無理数に関して学ぶ価値のある内容を水路づけて保証する機能をもっている。また同時に，消極的にみれば，"数直線上にプロットできる点は存在する"等の「行為に埋め込まれた知識」を潜在的カリキュラムの一環として機能させることで，極限認識のような内容への接近可能性(accessibilit・を統制する役割をもっている。したがって，中学校段階での暗黙的な「調整」を円滑にする為には，生徒が上述のような数学的実在に関わる「行為に埋め込まれた知識」を，概数や近似値などを扱う上で適切に構成できるように支援する必要があり，またその為に，教師は，極限に関してどの学年段階でどこまで教材として組み込まれているか，その教授学的変換の在り方を明確に必要がある。また，ここでデデキントの語用を借りて，極限を生成的(werdend)か存在的(seiend)かに分け，更にそれが記述できるか否かに分けることで，極限認識についての４つの状態を設定してみる。

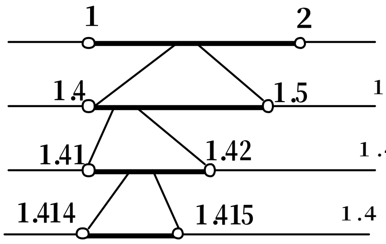
表１　極限認識の４状態

	生成的	存在的
記述可能	[1]	[3]
記述不能	[2]	[4]

「行為に埋め込まれた知識」によって暗黙的に「調整」することで，生徒は［1］の生成的かつ記述可能という状態にいると考えられる。

次に，明示的な「調整」について述べる。第１節で述べた，極限の深遠さに気付いて当惑している生徒は［2］の生成的かつ記述不能な状態にいると考えられるが，これは教授学的変換における過程Ⅰでの困難と同義と解釈できる。このような生徒に対しては，「数学ではそう約束(定義)する」と形式的に押し切ることは望ましくない。なぜならば，整然と定義すること(well-defined)の意味を示すことも数学教師の重要な役割であると見なせるからである(Even & Tirosh, 1995)。この生徒に対する「調整」として，ある学年段階では数学的対象として扱い得ない知識に対する“関心の維持”が考えられる。少なくとも数学的に偽らず，極限を含めた無限に

関する生徒の関心を維持するような支援は，知的に誠実な対処と見なしえる。これは，殊更新しい見解ではない。例えば，中学校３年における教科書の一部では，以下のような素朴な区間縮小法を用いて$\sqrt{2}$の近似が追求されており，縮小する開区間Ｉi(i＝1，2，3･･)が，Ｉ1⊃Ｉ2⊃Ｉ3⊃・・となっているとき，全ての開区間に共通な点が少なくとも１つあることが直観的に示されている[8]。



$1 < \sqrt{2} < 2$

$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$

$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$

図７　縮小する開区間

生徒がこれらの教材や，また例えばギリシャ期におけるエウドクスらの共可測性の議論などを教材として，数(arithmos)と連続量(megethos)の関係に触れ，いかに幾何学的な比例論が共約不能な量の比に適用されたのかを史的に追認することで，有限算法によって無限を処理することに関心をもつよう働きかける必要がある。そして生徒がこの極限への関心を，状態［2］から［3］への誘因として無理数の指導以降においても維持していく上での支援が，教師に要求される。これによって高等学校における実数の学習や，微積分の学習における極限の導入への能動的な関与が期待できる。

５．おわりに

本稿の目的は，無理数の学習指導の困難への対処について，教授学的変換の視点から整理，検討することであった。結論として，"中学校段階における極限認識への直面"という困難に対して，(1)教授学的変換の所産としての「行為に埋め込まれた知識」による調整，及び(2)数学的な実在への関心の維持による調整，という２つの方策を示唆した。

我々教師は，無理数の学習指導の前提として，その数学的，数学史的な背景を押さえることが求められているが，これを単なる教養として学習指導と切り離しておかず，生徒の問題解決における何気ない行為に，数学的な厳密さの回避や，数学的な本質への“気づき”を認め，活かしていく為には，教授学的な変換の在り方に確信をもつことが必要であると考えられる。

今後は，無理数の授業が技術的な指導に留まらず，実無限を記述できるような状態へと認識論的な振幅をもって展開していく為の学習指導の条件について理論，実践の両面から検討していくことが課題となる。

註記

１）シュバラールとブロッソーの両者が教授学的変換を捉える基本的枠組みに相違はない。しかし，前者が人類学などを参照して大局的に進める理論(théorie anthropologique de savoir)の構築を目指すのに対して，後者は学習環境の設定などを進める教授学的状況論(théorie des situations didactiques)を意図しており，教授学的変換の後半の過程に焦点を当て，より認知的な議論を進めている(宮川健 in my personal communication, 2002)

２）特にこの段階の議論に関しては，例えば以下の論文において論考が進められている。

Artigue (1994). Didactical engineering as a frame work for the conception of teaching produsts. R.Biehler et al. (eds.), *Didactics of mathematics as a scientific displine*(pp.27-39). Kluwer.

岡崎正和 (2000). 教授単元の考えを普段の授業に実現する一つの試み－教授学的工学に着目して－. *第33回数学教育論文発表会論文集*. 31-36.

３）整数，有理数，無理数の関係を整理し，実数の連続性に触れ，数直線上の点と実数との１対１対応を感覚的に理解するのは，高等学校での「数学Ａ」の指導内容とされており，有理数と無理数との質的な違いや，それらを実数として統一的に捉えることは中学校での明示的な指導内容ではない。

４）同時に有効数字や誤差の問題も扱う必要がある。

５）ウエストらは，もう１つ概念解明(conceptual resolution)というアプローチも挙げているが，本稿では議論の対象外とする。

６）この言説は，数学教育現代化の反省期に，石田忠男(1981)によっても引用されている。

石田忠男 (1982). 算数・数学教育の現代化はなぜ失敗したか. *現代教育科学*, No.305. 明治図書. 5-23.

７）「行為に埋め込まれた知識」は，子どもの先験的(apriori)な観念を数学的に同定，定式化するものに限定されない(小原 1999)。

８）例えば，大日本図書中学校数学 3 が挙げられる。

参考引用文献

Arcavi, A. et al. (1995, Jun) History of Mathematics for Teachers: The Case of Irrational Numbers. *For the Learning of Mathematics:An International Journal of Mathematics Education*, *7*(2), 18-23.

Arsac, G. (1992). L'évolution d'une théorie endidactique: l'exemple de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 7-32.

Balacheff,N. (1990). Towards a Problematique for Research on Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4) 258-72.

Brousseau,G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathematiques*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard,Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensee Sauvage.

Chevallard,Y. (1988). A theoretical approach to curricula. *JMD.13(92)* 2/3, 215-230.

Dedekind,R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen*.(河野伊三郎[訳] (1961). *数について*. 岩波文庫.)

Even,R.,Tirosh,D. (1995). Subject-matter knowledge about students as sources of presentation of the subject-matter. *Educational Studiesin Mathematics*, *29*. 1-20.

Fischbein,E.et al. (1995). The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 29-44.

Freudenthal,H. (1986). Review of Chevallard,Y. LaTransposition Didactique. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(4). 323-327.

Kang,W.,Kilpatrick,J. (1992). Didactical transposition in mathematical textbooks. *For the Learning of Mathematics*, *12*(1), 2-9.

Lebesgue, H.(1956) *Sur la mesure des grandeurs*. Paris: Gauthier-Villars

Geneve :L'Enseignement Mathematique. (柴垣和三雄[訳] (1976). *量の測度*. みすず書房.)

Sierpinska,A.(1995) Review of Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, *95*(4), 111-119.

Vergnaud,G.(1983). Phychology and Didacics of Mathematics in France-An Overview. *International Reviews on Mathematical Education*, *15*(2).

West,L.H.& Pines,L.(1985) *Cognitive structure and conceptual change*. Academic Press.(進藤公夫[監訳] (1994). *認知構造と概念転換*. 東洋館.)

Union Generale d'Editions (1974). *Pourquoi la Mathematique ?* (森毅・齋藤正彦[監訳] (1976). *何のための数学か*. 東京図書.)

中島健三 (1981). 算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のための考察. 金子書房.

小原豊 (1999). 乗法概念の初期指導に関する基礎的考察－認識論的な分析を中心として－. *教育学研究集録*, *23*, 111-118.

小原豊 (2001a). 学校数学にみられる教授学的変換について. *教育科学数学教育*, *No.520*. 明治図書, 106-109.

小原豊 (2001b). 教授学的変換に関わる 4 つの現象. *教育科学数学教育*, No.521,明治図書, 106-109.

島田茂 (1990). *教師のための問題集*. 共立出版.

長谷川栄 (1995). 教授的変換理論の展開と意義. *筑波大学教育学系論集*, *19*(2). 93-109.

溝口達也 (1995). 認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ－極限概念を事例として－. *数学教育学論究*, *63/64*, 27-48.

溝口達也 (1996). 教授学的変換における認識論的障害の克服の意味. *第29回論文発表会論文集*, 709.

付記

Chevallard の解釈については グルノーブル大学大学院の宮川健氏に貴重なご指摘を頂いた。また，草稿の段階で，認識論的障害に関して鳥取大学の溝口達也先生にご教示を頂いた。記して深謝致します。無論，資料解釈や理論展開に不備があれば，それは全て筆者が負うところのものです。