筑波数学教育研究　第 21 号　2002

研究論文

数学教育における教材・教具としてのコンピュータの機能に関する一考察

－Cabri-Geometry における『点の自由度』を事例として－

A Study on the Tools as Resources for Teaching and Learning of Mathematics: The Case of "Degree of Freedom of Points" in Cabri-Geometry

辻　宏子 (Hiroko TSUJI)
筑波大学大学院教育学研究科
(Doctoral Program in Education, University of Tsukuba)

本稿の目的は，教材・教具の観点から数学の教授＝学習におけるコンピュータ利用について議論することである。まず，教材・教具の概念を再考するために教授学的状況についての理論おける milieu 概念を導入した。これより，コンピュータを教材・教具の相互作用性に注目し状況を設計する道具として考える必要性を示し，Cabri-Geometry を事例に検討した。その結果，Cabri-Geometry の機能で実現される『点の自由度』が学習者の認識の変化を捉える視点となり，教授＝学習過程の設計の観点となる。しかし実現される状況に応じた問題の設定などの検討がさらに必要になる。

The purpose of this paper is to discuss the use of computer as resources in teaching and learning of mathematics. First, in order to reconsider concepts of resources, I refer to idea of milieu in didactical situations of mathematics. Next, I offer some points to design teaching situation by tool and discuss in the case of Cabri-Geometry.

キーワード：教材・教具，コンピュータ利用，教授＝学習過程，milieu

１．はじめに

数学教育におけるコンピュータなどのテクノロジー利用についての研究は，特に利用のための方法・技術などの面でまだ初期の段階にある[1)]。これまでに数学の教授＝学習に関わるテクノロジー利用の理論研究や実践研究が数多く報告されている。このような研究では，テクノロジー利用の可能性を理論的，実証的に検証することが研究課題となり，個々の児童・学習者の活動にもたらされる変化や期待される効果が示されている。その結果，テクノロジーを導入することによって，数学学習における児童・学習者の認識論的なレベルでの経験の変化を予想以上に期待できることが示された。しかし，この期待は研究者間では広く認められているものの，実際の学校現場においては，必ずしも反映されていない。先行研究から次の 3 点がこの現状に関わっており，今後の数学教育におけるテクノロジー利用の研究で扱わなければならない問題として考えられる。

(1) 児童・学習者個人の実際の認識や経験の変化の解釈についての分析の不十分さ
(2) テクノロジー利用の可能性と限界を理解した，利用の方法と技術に関する研究の不足
(3) 理論及び実践研究とカリキュラム開発，ソフト開発の乖離

そこで本稿では，先にあげた数学教育におけるテクノロジー研究の課題である(1)に応えるための基礎作業として，数学，特に図形の教授＝学習において利用される教具の役割を教材・教具の観点から再考する。

まず，数学教育における教具の概念の考察を通して，従来の数学の教授＝学習における教具の果たす役割とその問題点を指摘する。次に指摘した問題点の克服に対して，フランス数学教授学において Brousseau が提唱した，数学にお

ける教授学的状況についての理論(Theory of didactical situations in Mathematics)を言及し，コンピュータを含む数学で利用される教具の教授＝学習環境における位置付けを再考する。さらに数学教育おいて利用される教具の性質や利用について記述する視点を検討を，Cabri-Geometry の事例で示す。

２．数学教育における教材・教具とコンピュータ利用

2.1　教材・教具の概念

教育学における教材・教具の概念は，教育目標や教育的価値を具体化しているものと定義されており，教育目標を達成する教授＝学習活動の中に第三者として存在する。そのなかで教具は特に直観化され，あるいは物化されているものを指す[2)]。つまり教授＝学習において利用される教具は，教師による教材解釈を背景にもち，学習者の諸活動を支援し，対象や関係する現象についての学習者の認識を促すとともに，直観化することによってその認識に制約をもたらすものである。これは，教具の特徴が，Smith,K. & Smith,M.が強調するように「何を学習するかを決めるだけではなく，どのように学習するかを決め，個人の生涯での学習や創造性の上限を決めてしまう」[3)]おそれがあることを示している。このことは，教授＝学習環境の構成における環境条件[4)]の議論でも示されている。

環境条件とは，学習者を学習行動へと刺激しこれを促進し発展させるとともに，逆に学習行動を妨害し抑制し，減退させる影響を持つものである。長谷川によれば，環境条件は３つ：学習の基盤としての環境条件，学習の手段としての環境条件，学習の対象としての環境条件に分類される。そして，教具は主にこの学習の手段としての環境条件に含まれる。さらに長谷川は，学習環境の構成においては，学習主体の諸条件を配慮して行われる必要があるばかりでなく，環境条件の意味の受け取り，そしてそれに働きかけていく児童・生徒の学習の主体性を育成する指導も同時に必要であると述べている。これは学習環境の構成が教授＝学習過程の計画と一致するものであり，一連の教授＝学習過程において，学習者との相互作用性を持つものとして教具が位置付けられる重要性を示している。

2.2　数学教育における教具

数学教育における教具の先行研究には，数学的研究の特性の一つを構造の追及という面で捉え，この面での利用を重視した器具として開発し，実践を行っているものが多い。このような先行研究を踏まえ，平林[5)]は数学教育における教具を大きく二つに分けて説明している。一つは，本来非数学的であるものが数学的内容とかかわって初めて教具としての価値を持つものである。この場合，教具の物質的特性に依存せず，数学的な内容にかかわってその取り扱いが考えられる。例えば，小学校低学年のたし算の学習におけるおはじきの利用がこれに当たる。たし算の学習で利用される教具として，おはじきそのものではなく，おはじきを使って行う操作，2＋3 の計算を二つのおはじきと三つのおはじきを併せるという操作から学習するということが本質である。

二つめは，数学的概念を具体化したものであり，数学を視覚化し，物的操作可能なものに置き換えたものである。この場合，視覚化されたものそれ自身を問題にするのではなく，いくつかのものに共通な属性を抽出したりするなど，ものに対する子どもの働きかけによって数学が生まれる。例えば，図形学習における折り紙や三角形や四角形の形の板，図などの利用がこれに当たる。数学的概念としての図形の実体は，ことばでのみ表現することが可能である。しかし，折り紙などや図を利用し，図形の概念を探究する活動が行われることによって，抽象的な数学的概念の形成を支援する。

これによれば，教具の構造や教具を利用して行われる学習者の活動の中に，目的とする数学的な知識を埋め込み，表現する。つまり，学習者の認識は，この教具とその利用の中にどのように数学的な知識が表現されているかに左右されるということができる。

平林はさらにこの教具を，利用の仕方に応じて三つに分類し，次のように説明している。

「第一は，「つめ込み器」といえるもので，･･･これは心理学的にもっとも素朴な意味での「条件付け」の器具である。第二は，いわゆる「説明器」である。･･･これは，主導権はあくまで教師にあり，ただよく噛み砕いて教えるための器具である。第三は，いわば「思考器具」ともいえるものである。これは，子どもに多様な思考を触発し，種々の方向からそれへの近接を許す器具である」[6)]

この分類は，一つの教具がどれか一つに対応することを示すものではない。例えば，説明器の中には利用方法によって思考器具ともなるものがある。平林は，平行四辺形の求積公式説明器を例としてあげている。求積公式を説明するために教師が利用するのではなく，求積公式の構造を説明器の利用を通して学習者が探究すれば，説明器は思考器具になる。このことからも，教具の教授＝学習に対する効果は，教具の構造や物質的な条件に依存するだけでなく，利用の方法や場面にも依存することが示されている。そして，学習者と教具の相互作用性に注目する必要性がここから伺われる。

2.3　数学の教授＝学習における教具の利用に関する問題点

2.1 ならびに 2.2 でまとめたように，数学教育における教材・教具の考察から，教具とその利用を，学習環境の環境条件として捉え，学習者との相互作用性を重視して考えられなければならない。

しかし，従来の教具は，説明器に分類されるものが多く，教材・教具の定義にある教授＝学習活動における第三者としての役割を果たさず，教師の意図の押し付けとなっている場合が多い。また，学習内容に依存して限定的で，学習内容を直観化するための，教師による教材解釈の影響が強いことによって，学習者の活動や知識の構成にもたらす制約が大きかった。よって，Smith & Smith が強調する，教具が学習に対して上限を決定してしまっている可能性が高かったものが多かったといえる。

これに対して近年のコンピュータ利用による効果が期待されるが，この問題点を克服しているかは疑問である。まず，教授＝学習の目的に応じた明確な利用がなされていないために，楽しいだけで終わったり，利用する価値が感じられないという問題を実際に生じている。また，見た目は従来の教具と異なるように見えるが，学習者の経験に数学的な内容に関する認識に深い変化を及ぼすまでに至らない利用もあり，結果として従来の教具を利用する方が，内容に焦点化され，学習者に明確に把握されるという場合が見られる。この背景には，教材・教具の概念に暗黙に含まれている学習者との相互作用性の実現の難しさと，相互作用性に注目した教授＝学習過程の計画の難しさがあると考えられる。

この問題を解決し，さらにテクノロジー利用に関する研究課題に応えるために，数学の教授＝学習における教具に関する理論の再考が必要である。そこでは教具の位置付けや，教授＝学習における学習者の活動や認識に対する拡大と制約のバランスをどのように保つかという教具の利用に関する考察が課題として考えられる。そこで本稿では，数学の教授＝学習における教具の位置付けについての考察を行う。

３．教授学的状況についての理論

２．で示された教授＝学習における教具に関する理論の再考をするに当たって，本研究では，フランス数学教授学における教授学的状況[7)]についての理論を背景に議論を進める。

3.1　教授状況のモデル化－milieu 概念の導入

Brousseau は，教室で見られる教授現象を，主体が数学的な知識を確立することを目的とした教授学的状況として捉えた。教授学的状況は，学習者と教師などの関係によって作り上げられている。この教授学的状況についての理論では，知識の社会性に注目し，また教師の社会的な責任を果たす場面と，知識の構成の個人的な側面を重視した場面(亜教授学的状況)とを理論的に区別している。さらに Brousseau は，主体による知識の構成を支える概念装置として milieu を提案し，教授学的状況に含まれる教授システムの部分として位置付けた。milieu は教授学的状況における学習者の相互作用の相手であり，知識の構成は相互作用を通して行われる。

3.2　学習者と milieu

フランス数学教授学における様々な概念には，生物学の発展に見られるアイデアが多く取り入れられている。milieu 概念もその一つであり，それがもつ特徴を生物学における概念が持つ特徴から探ることができる。金森によれば，milieu は，主体を囲む物理的な環境のすべてではなく，主体自身にとって有意味な刺激を発するものののみからなる[8)]。つまり，milieu は，主体にとって与えられたものではなく，主体にその構成基準が存在し，主体によって能動的に構成され，その時々の様々な条件に応じて流動的に変化するものであるということができる。

Brousseau による数学の教授学的状況についての理論の中で，金森に見られる生物学に基づく milieu の考え方は，教授学的状況の個人的な側面において次のように現れている。ここでは Brousseau の例示する『The Race to 20』を取り上げて説明する。『The Race to 20』は，ペアを組んで順に数を数えていくゲームである。1 から順に，数字を示していき“20”といった方が勝者となる。ただし，一人が一回に言うことができる数字は 2 つまでとする[9)]。

教師が社会に対して持つ義務から，数学の教授＝学習の目的を達成するための milieu の設定は，教師の役割の一つである。つまり，学習者に対して milieu は教授学的状況の部分として与えられる。『The Race to 20』が状況であり，ゲームのルール，相手の示した数字に 1 か 2 を足す，20 を言った方が勝利することが状況に潜む数学的な構造である。そしてこのルールによって決定され，学習者によって示される 20 までの実際の数の並びが milieu である。この段階において，学習者にとっての milieu は，教師にとってのそれと一致するものではない。教師にとって milieu は，“2，5，8，11，14，17”であり，初項 2，公差 3 の数列が見える。しかし，学習者はルールが示す状況の不変な構造を捉えることができないため，とにかく不規則に 1 か 2 を足した数字を示す(行為)，つまり学習者自身の milieu を構成する。しかし，何度かゲームを行い，自分がゲームに勝った(フィードバック)ときの数の並びつまり milieu の解釈から，“17 を言えば勝てそうだ”や“11 を言えば勝てそうだ”という予測が生まれる。そして次に予測を基にし，勝つときの条件によって milieu を構成し始める。学習者はこのような milieu への行為とフィードバックを通して，様々な情報を得て，milieu の解釈を変化させる。それに伴って，学習者にとっての milieu が随時再構成されるため，学習者の認識が進むにつれて milieu も変化する。最終的にそこに潜む不変な構造を見つけ出し，定式化する。このような学習者の認識の能動的な変化の結果，学習者はいくつかの項目を組織化した知識の構成，つまり知識に関する個人的な文脈を作る。

3.3　milieu 概念の導入の利点

この教授学的状況についての理論を言及する利点は，教授現象を主体が持つ複数の関係を含む状況として捉えることによって，教授＝学習過程を，主体である学習者の認識の変化とそれに伴う関係の状態変化のプロセスとしてみなし，議論することができる点にある。そして，学習は主体である学習者が，milieu との相互作用を通して，目的とする知識の構成をすることであり，教授は，学習者を助長するために目的とする知識を状況に埋め込み，数学的な現象としてあらわれる milieu への変換を行う，学習に影響を与える社会的・文化的な活動を促進するなどを意味すると考えることができる。これは，２．で触れた教授＝学習活動における学習者，教師，教材・教具の関係に一致するものであり，教材・教具の概念と milieu 概念との類似性があることを示している。ここでさらに milieu 概念を導入し，教材・教具の概念を捉えなおすことの意義を，次のように説明することができる。

行為/フィードバックの繰り返しで説明される学習者と milieu の相互作用は，情報の交換を通して刻々と変化する学習者の数学的な現象の認識のプロセスであり，学習者の認識の変化は，学習者による milieu に対する行為(action)の変化として，観察可能な現象として捉え，説明することができる。よって教師による milieu

の設定は，学習者の認識の変化の予測と変化の方向を誘導する手段の検討が必要であり，一連の相互作用を生じる教授＝学習過程の設計ということができる[10]。これより，教具の概念を milieu 概念によって捉えなおすことは，教具の開発と利用の問題点を克服するものである。従来の教具は，教授＝学習過程において一時的で，限定的な取扱が前提となり，教師の意図する方向へ学習者を矯正する傾向の強かった。しかし milieu 概念として再考することにより，教具の開発と利用は，目的とする知識の構成につなげる，学習者と教師，milieu との相互作用を生む，一連の教授＝学習過程の設計の手段の開発へと変わる。

3.4　milieu の設定の観点

これまでの考察より，milieu の設定の観点は，数学教育における教材・教具論の構築に対する示唆を与えてくれる。

Balacheff は，milieu が学習者の知識の構成を支援する相互作用の相手となるための根本的な特徴を，Brousseau の教授学的状況についての理論の考察を進め，次の 3 点にまとめている[11]。

1) 知識に対して特殊な問題の実行を許容する。
2) 学習者が様々なレベルで問題を考えることができる。
3) 学習者の解法が新しい知識を生じる方向へと改良されていくことができるような，有意味なフィードバックを与える。

milieu は目的とする数学的な知識を表現する状況の部分であり，すなわち問題を含むものである。よって，1)は教授状況の組み立ておいて，目指す知識と問題の間のつながりを議論する必要があることを示している。2)は，学習者の行為に関わる次の二つの可能性を milieu が持つことを説明するものである。そしてこれは，生物学における milieu 概念を，教育現象を説明する装置として導入した利点を背景とするものである。milieu のもつ特徴は，まず様々なレベルにある個々の学習者が，問題に対してそれぞれにアプローチすることが可能であること，そして次に学習者の認識の変化に応じた，アプローチの変化を許容することである。3)はフィードバックの解釈によって学習者の知識の構成の方向性が決定されることことの重要性を強調するものである。

この Balacheff のまとめた三つの特徴を，教授＝学習過程の設計における教師の作業として捉えなおす。1)と 2)は，Brousseau が述べた教師の役割としての知識の再文脈化の内容である。つまり，学問としての数学を主体の発達等を考慮して学ぶための数学に変換する作業である。また 2)と 3)は，行為/フィードバックで説明される，学習者と milieu の相互作用を教授＝学習プロセスにおいて生み出し，相互作用の制約を与えつつ知識の構成を支援する教師の設計の内容である。

しかし，この三つにまとめられた特徴をもとに，milieu の設定，つまり教授＝学習過程の設計に関する具体的な観点についてさらに検討する必要がある。そこで本稿では，まず Brousseau の理論を背景に持ち，フランスにおいて開発された Cabri-Geometry を事例として検討することによって，今後の研究に対する示唆を得る。

4．図形の教授＝学習において利用される教具としての Cabri-Geometry の特徴

これまでの考察より，教具が一連の教授＝学習過程の設計の手段として位置付けられることが伺われた。ここでは，Cabri-Geometry を事例として，今後の数学の教授＝学習過程において利用される教材・教具論の提案に対する示唆を得る。

4.1　Cabri-Geometry が提供する図形の教授＝学習の状況

Cabri-Geometry は，基本的な図形(点，直線ならびに中点，垂線等)の組み合わせにより，様々な対象や関係を描くことが可能なソフトである。さらに，作図過程において定義された対象や対象の間の関係を，図形に対してマウスを使って直接的に操作する drag モードにおいて，図の動的変形における不変な特性として視覚的に捉えることを可能にし，数学の新しい現実性

を生じる[12]。またさらに，図の変形に伴って変化する測定の機能など，従来の道具では保持し得ない，いくつかの機能が連動する操作が多様に含まれており，学習者の目的に合った手段の選択が可能になっている。

これらの機能や特徴によって，図形に関する知識の構成を助長する状況が，学習者に提供される。Cabri-Geometry で動かしても形が崩れないひし形の作図を考えてみる。下図 1.はひし形の概念の属性に従った作図とその結果の図の変形である。

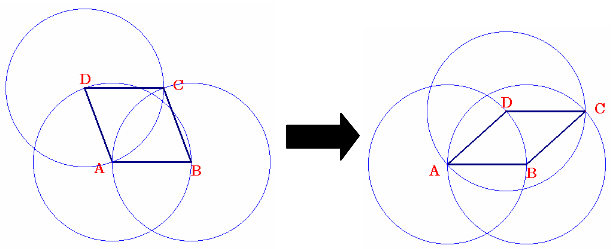

図 1.　ひし形の作図と図の変形(1)

ここで，スクリーン上のひし形の図とその動きは，学習者にとって milieu である。その動きを決定するものは作図過程である。よって，作図過程が変化すれば，スクリーン上の図の振る舞い，つまり milieu は変化する。図 2.は変化した milieu の一例としてみなすことができる。

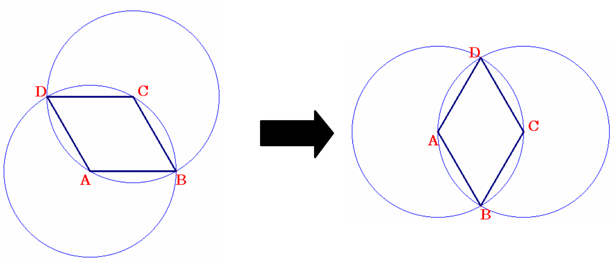

図 2.　ひし形の作図と図の振る舞い(2)

このとき期待される知識の構成は，ひし形に関するものであると同時に，学習者の図形の捉え方の変化を生じるものである。Cabri-Geometry は作図過程で定義された関係を保持した図の振る舞いを実現し，学習者が図形の知識を相互作用を通して構成する一連のプロセスを生み出す状況を生み出している。つまり，ひし形に関する性質，作図過程，図の振る舞いなどをつなげた文脈を作る状況を Cabri-Geometry は提供している。そして，学習者のひし形の知識の構成が進められるとともに，図形の認識が，形状に依存したものから，点の間の依存関係によって説明されるものへと変化する。そして，図形の教授＝学習における作図は，単に図を描くことではなくて，図形の構造を依存関係の論理的な組み立ての作業として変化する。

4.2　点の自由度

4.1 で示した学習者の変化を捉えるアイデアは，『点の自由度』という考えによって説明することができる。『点の自由度』という考えは，スクリーン上の点の存在の様を定義するもので，他の対象との関係で決定される[13]。例えば，スクリーン上に任意に作成された点は，自由に動かすことができる(自由度 2)。次に 1 本の直線上に点を取る。その点は直線上のみを自由に動くことができる(自由度 1)。しかし 2 本の直線の交点は，その点自身を drag して動かすことはできない(自由度 0)。

定規とコンパスによる作図においても『点の自由度』の考えを見取ることはできる。しかし，作図過程の組み立てや結果の図の考察・検討において，『点の自由度』に注目する機会や必要性はほとんどない。つまり，図形の認識を図形を構成する要素間の依存関係として意識する状況を実現していないからである。Cabri-Geometry において，この『点の自由度』という考えは，不変性の視覚化という milieu を実現する鍵となるものであり，Cabri-Geometry によって実現される状況の特徴である。よって milieu との相互作用を分析し，学習者の図形の認識の変化を捉える観点として，この『点の自由度』という考えを採用することができる。

4.3　教授＝学習に対する効果と問題点

Cabri-Geometry は，これまで図形の教授＝学習において利用する，対象の一般性を保持した教具の開発の困難さを解消し，図形の認識を促す教材・教具としての機能を果たすものであると考えることができる。

従来の教具では，学習内容に限定されていたり，図が対象とする図形の特殊であるという性質を強くもつ。そのため，幾何学の二面性に影

響を受け，学習者の図形の認識や問題解決場面において誤りや困難を生じる原因の一つとなっていた。Cabri-Geometry は，定義された関係を保持した図の振る舞いという表現を可能にしたことによって，この点の解消が期待されるものである。これは道具から学習者へのフィードバックの質が変化したことを意味し，直観化された道具の学習に対する効果を高めると同時に，一連の教授＝学習過程の設定を可能にしたといえる。

また Cabri-Geometry は，従来利用されてきた道具よりも，表現の形式や操作の選択にも多様性があり，場面への導入の目的に応じて，いろいろな役割を果たす道具となりうる。例えば，図の動的変形を利用する場合(drag モード)には，測定などのその他の機能を併用して，図に対する実験・観察的なアプローチを行うことが可能である。これは，新しく学ぶ概念やいくつかの概念の間の関係を探求する場面において，個々の学習者のレベルに応じた相互作用性を可能にする。また，Cabri-Geometry の作図は，『点の自由度』で説明される要素間の関係として図形を認識することから，対象となる図形の構造への注目が促されると期待できる。これが学習者の図形の認識において効果的な思考の外化とその意味の解釈を生むため，より論理性を重視した図形の教授＝学習の場面での利用[14]に効果的であり，Cabri-Geometry が一連の教授＝学習過程で扱われる教材・教具としての価値をもつことがここからも伺われる。

しかし，このような Cabri-Geometry の特徴を生かし，図形の教授＝学習に対して効果的なプロセスの設計には，解決されなければならない問題点が残されている。まず Cabri-Geometry によって提供される状況の教授＝学習過程における価値付けの問題である。これは Cabri-Geometry を利用する目的と，それと係って利用する機能と取りうる手段がどのような意味を学習に対して持つかを明確にすることである。Cabri-Geometry の利用が常に，目的の知識を構成する学習者との相互作用を生じるわけではなく，学習行動の妨害となりうる。また，コンピュータを本稿で再考した教材・教具として位置付けられることは，学習者に学習の責任がより移行され，学習者の活動の自由度が増す。さらに学習者と Cabri-Geometry の間の相互作用の結果生じる知識は，個人的な性質を持つものであるため，他者との議論を起こす機会を教師は設定する必要があるなどの様々な複雑さが生じる。よって，この道具の利用にあたって，教師は先の視点を参照して，目的に応じた内容の吟味，問題の設定，道具の選択，学習者と Cabri-Geometry(コンピュータ)などを含む他者との関係，それらを踏まえた教授＝学習過程の注意深い設計のための指針が必要となる。Cabri-Geometry によって提供される状況における学習者の図形の認識は，『点の自由度』という考えによってその変化を捉えることができる。これは教授＝学習過程の設計の一つの観点となる。しかし，3.4 で触れた教授＝学習過程の設計につながる milieu の設定の他の具体的な観点の抽出によって行われなければならない。

５.まとめと今後の課題

本稿では，数学の教授＝学習において利用される教具の役割を再考し，教材・教具という観点からのコンピュータ利用についての理論を提案することの必要性を示した。そして，本研究の理論的背景である，Brousseau の教授学的状況についての理論に影響されている Cabri-Geometry が教材・教具としての役割を果たし，教授＝学習過程の設計を従来と変える可能性があることを検討した。そして，Cabri-Geometry の機能によって実現される状況の特徴である『点の自由度』という考えを，学習者と milieu との相互作用の観点として採用できることを述べた。

今後は，4.3 にある残された課題の解明を進めるとともに，教授＝学習過程の設計のための理論的な枠組みを構築することによって，コンピュータを利用した教授＝学習環境の構築について議論を進める。

註と参考・引用文献

１) Balacheff, N. and Kaput, J.(1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp.469-501). Kluwer.， Goldenberg, E. & Cuoco, A(1998). What is Dynamic Geometry?. in R, Lehrer & D, Chazan (eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp.351-367). Lawrence Erlbaum Associates.ならびに Clements & Battista (2000). in A., Kelly, R., Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education.* Lawrence Erlbaum.

２) 中内敏夫 (1978). *教材と教具の理論*. 有斐閣.，宮原修 (1990). 教材・教具. 細谷俊夫編集[代表], *新教育学大事典* (pp.438-440). 第一法規.

３) Smith, K., & Smith, M. (1966). *Cybernetic principles of learning and educational design*. Holt, Rinehart and Winston. (長谷川淳他[訳] (1968). *教育工学入門*. 明治図書.)

４) 長谷川栄 (1967a). 学習指導の過程と段階の吟味. 伊藤和衛・大浦猛・宮原兎一編著, *教育原理研究* (pp.157-163). 明治図書.，長谷川栄 (1967a). 学習環境の構成. 伊藤和衛・大浦猛・宮原兎一[編著], *教育原理研究* (pp.164-166). 明治図書.，長谷川栄 (1978). 教授メディア，学習環境. 木原健太郎[監修], *現代教科教育学体系,1* (pp.149-155). 第一法規.

５) 平林一栄 (1979). 教具論. 赤攝也[編著], *教育学講座,11*, (pp.297-314). 学習研究社. ならびに平林一栄 (1985). 数学的教具と遊びの精神. 小林善一[編集代表]. *算数・数学教育実践講座,17*, (pp.10-14). ニチブン.

６) 脚注 5, 平林 (1985), 11.

７) Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. (tras. by N.Balacheff, N., M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield), Kluwer.

８) 金森修 (1996). *フランス科学認識論の系譜 カンギレム，ダゴニュエ，フーコー*. 到草書房.

９) このゲームに勝つために，数の間に不変にある関係を見つけ，乗法，除法の演算の意味を再考することが学習者に期待される。

１０) この考え方に類似する研究として，近年の状況論を背景にした認知的道具論の研究がある。例えば，加藤浩, 有元典文[編著] (2001). *認知的道具のデザイン*. 金子書房. 数学教育においては，飯島康之 (1996). コンピュータを利用した数学的探究活動における証明. *日本数学教育学会論文発表会テーマ別研究部会「図形・論証」発表資料*. がある。ここでは，作図ツールを問題を situation 化する道具としてみなし，問題解決に関する先行研究で示されてきたアプローチを実現する学習環境を提供するコンピュータの可能性と証明との係わりが，先行研究を踏まえた著者によるプログラム開発と実践から述べられている。

１１) Balacheff N. (1994). Advanced Educational Technology: Knowledge Revisited. *Journal of Educational Technology Systems*, *23*(2), 98-106.

１２) Balacheff, N. and Kaput, J. (1996). Computer- Based Learning Environments in Mathematics. In A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp.469-501). Kluwer.

１３) Laborde, C (1995). Designing task for learning geometry in a computer-based environment: the case of Cabri-Geometry, in Burton, L. & Jaworski, B. (eds.), *Technology in Mathematics Teaching* (pp.35-67). Chartwell - Bratt.

１４) Norman, D. A. (1990). *Things That Make Us Smart: Defending Human Attributes in the Age of the Machine.* Addison Wesley. (佐伯胖[監訳] (1996). *人を賢くする道具：ソフトテクノロジーの心理学*. 新曜社.) ならびに Norman, D. A. (野島久雄[訳]) (1992). 認知的な人工物. 石崎俊・波多野誼余夫編集代表, *認知科学ハンドブック*. 共立出版.