研究論文

原場面の役割を視点とする数学的モデリング能力の同定
－オーストラリア・ビクトリア州における数学教科書の問題分析を通じて－

Identification of Mathematical Modelling Ability from a View Point of the Role of the Original Situations: Through the Concreteness by Analysis of Mathematical Modelling Problem

松嵜　昭雄 (Akio MATSUZAKI)
筑波大学大学院教育学研究科
(Doctoral Program in Education, University of Tsukuba)

本稿では，数学的モデリングを遂行するのに必要な能力である，数学的モデリング能力を同定する。数学的モデリング能力の記述にあたっては，数学的モデリングを促進する考え方(池田 1998)のうち「現実の方向」を強調する立場から，「問題から様々に想起される現実世界における場面」である原場面の役割に注目した。次に，VCE の示す数学学習にもとづいて編纂された数学教科書 "General Mathematics"内の数学的モデリング問題「ゴール角度のモデリング」を参照した。その問題に示されている数学的モデリングの手順にしたがい，各数学的モデリング能力の具体化を図った。

In this article I focus on the role of the original situations to identify 'mathematical modeling Ability' upon the processes of mathematical modelling. The original situations are situations in real world, which could be conjectured by modeler. From this viewpoint, I identify six points as 'mathematical modeling Ability.' Next, I refer mathematics textbook based on VCE study program. The procedures of mathematical modelling are shown in a problem, and I describe 'mathematical modelling Ability' concretely.

キーワード：原場面，数学的モデリング能力，変数，VCE

１．はじめに

昨年末，ある日刊紙に「日本の 15 歳 国際学習到達度調査トップクラス」という見出しが一面を飾った。文部科学省は「知識技能だけでなく実生活の活用・応用力もおおむね良好」とコメントを寄せた[1)]。これは，OECD(経済協力開発機構)による，数学的リテラシーに関する国際学習到達度調査(略称 PISA)の結果を受けてのものであった。PISA の枠組みにおいて，数学的リテラシーとは，｢数学が世界で果たす役割を見つけ，理解し，現在及び将来の個人の生活，職業生活，友人や家族や親族との社会生活，建設的で関心を持った思慮深い市民としての生活において確実な数学的根拠にもとづき判断を行い，数学に携わる能力｣(OECD 2001, p.22; 国立教育政策研究所 2002, p.94)とされている。PISA は，知識，技術，能力の幅の広さを表現するために，リテラシーという用語を用いている[2)]。また，わが国においても，新学習指導要領では，数学的活動が改めて見直されている。このような背景があるように，数学的モデリングに必要な能力は，これからの数学教育において，いっそう注目を浴びる数学的能力の 1 つとなるであろう。

２．研究目的・方法

本稿の目的は，数学的モデリング能力を同定することである。はじめに，本稿で参照する数学的モデリングの図式を規定し，その過程に照らし合わせて，数学的モデリング能力を記述する。能力記述の際に原場面の役割を視点とすることにより，数学的モデリング能力を同定する際，対象となる過程が焦点化される。次に，同定した数学的モデリング能力の具体化を図る。そのために，オーストラリア・ビクトリア州で実際に使用されている教科書内の数学的モデリング問題を参照する。

3．数学的モデリング能力

佐伯(2002)は，「数学的モデリングの活動に必要な能力を総称して数学的モデリング能力」(p.11)を定義している。高等専門学校の生徒を対象とする「数物ハンズオン」の実践では，グラフ電卓や CBL/CDA といったテクノロジー利用を前提として，能力の検討をおこなっている[3)]。佐伯は，数学的モデリング能力を定義する際，池田(1998)の示す数学的モデリングの図式をもとにしている。

Clatworthy and Galbraith(1987)は，オーストラリア・クイーンズランド州のシニアカレッジで数学を受講している学生に対するモデリングの指導プログラムを提出し，モデリング能力の評価表を作成している。評価表には，評価の規準(Criteria)となるモデリング能力が 3 段階のスタンダードで示されている[4)]。ここに示される能力は，現実世界と数学の世界のリンクを強調する数学的モデリングの図式をもとにしている。

3.1 数学的モデリング過程

数学的モデリング能力の記述にあたっては，数学的モデリングの各過程に則した検討が必要である。池田(1999)によれば，数学的モデリングを促進する考え方には大きく分けて「現実の方向」と「数学の方向」がある。このうち，「現実の方向へ向かう考え方では，問題場面に潜む曖昧なものを見出そうとしたり，それを明確にしようとする考え方(type1)と実際の解決に影響を及ぼす要因を特定したり，各々の要因が実際の解決に及ぼす影響の度合いを相対的に比べたりする考え方(type2)に分類できる」(p.6)とされる。筆者は「現実の方向」を強調する立場であり，(type1)と(type2)の考えが強調される。

本稿では，現実場面から現実モデルへのモデル化の過程が強調されている，Blum(1985)の示す図式を参照し，数学的モデリングの図式を図 1 のように規定する。Blum は，問題解決過程の中で生成される各モデルに対して，次の 6 つの過程を数学的モデリングにおける各過程として特徴づけている：「αモデル化」「β数学化」「γ数学的作業」「δ1 現実場面への解釈」「δ2 現実モデルへの解釈」「ζ応用」

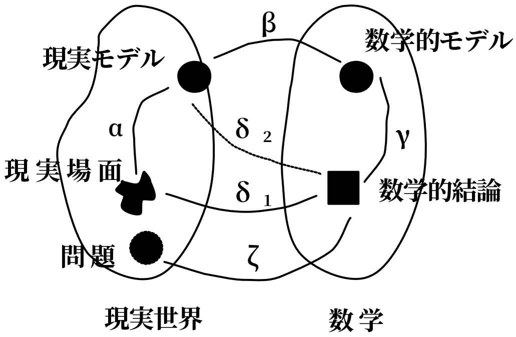


図 1 数学的モデリングの図式

3.2 原場面の役割

次に，数学的モデリング能力を記述していくための視点として，原場面の役割に注目する。原場面とは「問題から様々に想起される現実世界における場面」(松嵜 2001a, p.25)のことである。ここで言う問題は，数学的モデリングの中で生成される各モデルに対応すると考えてよい。ところで，数学的モデリングは再帰的過程であり，図式に見られる過程を幾度となく繰り返す。また，数学的モデリングの遂行は，図式に示されるような順序で進行するとは限らない。それは，数学的モデリングでは，問題の変容を前提としていることに起因する。本稿では，問題の変容(清水 1987)を，問題を構成する変数の変化として捉えていく。

数学的モデリングのはじまりの多くは現実世界である。また，最終的に得られた結論の解釈や応用の拠り所となるのは，数学ではなく現実世界である。原場面は，モデラーによって様々に想起され得る，柔軟性を特徴の 1 つとしている。これらの諸点に，原場面の役割に注目する意義を見出すことができる。原場面の役割には次の 3 点が挙げられる(松嵜 2001a, p.26)：

(1) 現実モデルもしくは数学的モデルを保証する役割
(2) 解釈の拠り所としての役割
(3) 「αモデル化」の妥当性を検証する役割

3.3 数学的モデリング能力の同定

本稿では，数学的モデリング能力を数学的モデリングの各過程を遂行するのに必要な能力と定義する。原場面の役割を視点とする場合，各役割に対応する数学的モデリング能力は，次頁のように記述される。

(1)の役割

(1a) 自身の数学的スキルに合うように，変数を変化させせることができる。

(1b) 自身の数学的スキルに合わせて，変数間の関係を構築できる。

(2)の役割

(2a) 得られた結果は，どの変数に由来するものであるのか確認できる。

(2b) 参照している変数は，条件付与なされたものであることが確認できる。

(3)の役割

(3a) 問題を構成する変数を見出すことができる。

(3b) 独立変数と従属変数に変数を区別することができる。

(1)の役割を視点とする能力は，数学的モデルがつくられることを前提としているため，図 1 で言えば，「αモデル化」と「β数学化」の各過程の遂行に必要である。(1a)と(1b)の各能力はともに，問題によって変数が変化するため，「αモデル化」と「β数学化」のどちらにも対応することになる。これらの能力に対しては，解決に必要な数学的スキルの習得が大きく影響を及ぼすことになる。もし十分な数学的スキルが習得されていないのであれば，ただ闇雲に，与えられた変数を自身のスキルに関連させて解決しようとする。結果として，何かしらのモデルをつくり，その時点で解決が進行しているように見えても，最終的にモデルの修正を余儀なくされてしまう。

(2)の役割を視点とする能力において，解釈の拠り所はモデラーにより異なる。つまり，(2a)と(2b)の確認の対象は，δ1とδ2の 2 通りである。この各能力は，図 1 で言えば，δ1 とδ2 の過程の遂行に必要な能力である。例えば，「運動会の全員リレーに勝ちたい。どうしたらいいか？」という「リレー問題」(大澤 1996, p.23)では，問題がはじめに提示され，実際には，バトンの受け渡しの効率化により，リレータイムの短縮を図る「バトンパス問題」が解決の対象となっている。原場面は「リレー問題」であり，「バトンパス問題」の解決の結果がリレーのタイム短縮につながり，運動会の全員リレーでの勝利が期待されている(拙稿 2001b)。数学的モデリングを促進する考え方のうち「現実の方向」を強調する場合，解決の対象を明確に区別することは大切である。もし(2a)の能力が欠如していれば，現実場面と矛盾を引き起こすような解答が数学的結論の１つとして導かれたとしても，それを破棄せずに採用してしまうことになる。もし(2b)の能力が欠如していれば，現実場面の一場面であることを認識せず，過般化が懸念される。数学的モデリングでは，ある程度モデル化や数学化のなされた問題設定が意図的におこなわれるため，そのことをモデラーが自覚しておく必要がある。

(3)の役割を視点とする場合，数学的モデリングの中でつくられた現実モデルの存在が前提となる。参照される現実モデルは，数学的モデリングの遂行度合いにより様々である。(3a)と(3b)は，主に，モデルの修正や改善の際に必要な能力である。(3a)と(3b)は，図 1 で言えば，「αモデル化」の進行と逆向きの遂行を支える能力である。もし(3a)の能力が欠如していれば，解決に必要な変数であってもそれを見落としてしまい，また，もし(3b)の能力が欠如していれば，変数間の関係を捉えきれず，いずれの場合も十分な現実モデルであると誤認してしまうことになる。

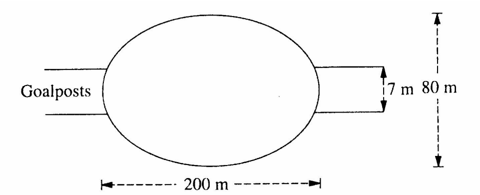
４．数学的モデリング能力の具体化

オーストラリアの VCE(Victorian Certification of Education)が示す数学学習では，数学的モデリングは指導内容の 1 つであり，応用として位置づく(Board of Study 2000, Stillman 2000)。数学は 5 科目から構成されており(例えば，Rehill and McAuliffe 1999a, 1999b, 1999c, 1999d, 1999e)，VCE が示す数学学習にもとづいて編纂されている各科目の教科書の冒頭には，教科書の取り扱いをはじめ，Course of Study 等が掲載されている。そのうち*“General mathematics”*(Rehill and McAuliffe 1999a)の冒頭では，既習の学習領域[5)]の成果を前提とする，学習の成果を評価する課題に数学的モデリングが位置づけられている。

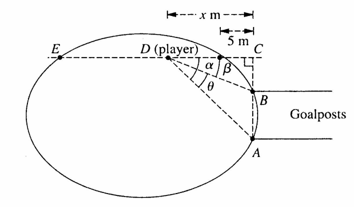
4.1 数学的モデリング問題

本稿では，*“General mathematics”*の中で取り上げられている問題を例示する。その問題には,「ゴール角度のモデリング」として，問題の他に数学的モデリングの手順が示され，例題として取り扱われている。以下はその全訳である(Rehill and McAuliffe 1999a , pp.302-305)。

オーストラリア式ルールのフットボールでは，ある選手がボールを蹴り，地面や他の選手に当たる前に，そのボールを他の選手が空中でうまくとったとき，その選手はボールを「マーク」していると言われる。マークしている選手は，マークのつけられた地点からボールを蹴ることが許される。フィールドの広さとゴールポスト間の距離の付け加えられた図が与えられている。



問題　選手は, 図に見られる直線上のある点からゴールに向かってボールを蹴る。この直線上で，選手はゴールキックを成功させるチャンスを最大にするためには，どこにマークするべきか？



1. 関連する変数

多くの要素がゴールキックの成功に関わっている。その要素の幾つかは：

- 選手からゴールポストまでの距離
- 与えられた直線と蹴られたボールの通過する直線間の角度
- ボールの届く高さ
- フットボールの重さ
- フットボールの大きさ

2. 仮説を立てる

変数についての幾つかの仮説を立てることによって，複雑な場面を単純化しなくてはならない。幾つかの変数は：

- コントロールされ得る。それは，一定の値をとるとみなされる。
- 排除され得る。なぜならば，その変数はモデルにほとんど影響がないからである。
- モデルの中に含まれ得る。場面を単純化するために，われわれは次のように見なす：

(a)　ゴールポストは直線 AB 上に立っている。
(b)　蹴られたボールは, ゴールポストに向かって真っ直ぐに飛んで行く。

3. 変数を選択

もし「実際」問題におけるすべての要素を含むのであれば，数学的モデルは「現実」世界を回顧(reflect)するであろう。しかしながら，モデルに含む変数が多ければ多いほど，モデリング過程の中で要求される数学的操作をやってのける(perform)ことはますます困難なものとなるであろう。数学的モデルを定式化する中で，われわれは 2 つの変数に限定する－独立変数と従属変数。

考えている事例において，以下のように変数を定義するかもしれない：

$x =$ 選手の鉛直距離 CD

$a = \angle ADC \quad b = \angle BDC \quad q = \angle ADB$

ノート：変数 x, a , b , q は，与えられた直線に応じて変わる，選手の位置として変化する。他の変数は一定であるとみなしている。

4. 数を固定

変数の幾つかに対して固定した数は，数学的モデリング過程の重要な部分の 1 つである. AB = 7m, BC = 18m と仮定しなさい。ここで,

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} = 7 + 18 = 25\,\mathrm{m}$$

$$\triangle ADC \text{から，} \tan a = \frac{25}{x}. \qquad \{\text{三角比}\}$$

$$\triangle BDC \text{から，} \tan b = \frac{18}{x}. \qquad \{\text{三角比}\}$$

もしq がゴールに蹴り込む角度であれば，そのとき

$$q = a - b = \tan^{-1}\left(\frac{25}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{18}{x}\right)$$

q の変数は x の変数次第である。したがって，x は独立変数であり，q は従属変数である。

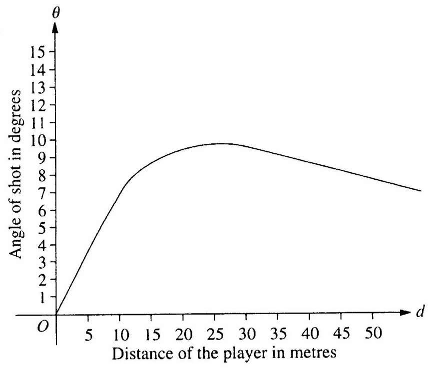
5. スプレッドシートやグラフ電卓の利用

われわれは変数 x に対する幾つかの数を固定する必要がある。x は 5 ではじめて，1 ずつ 50 まで増加すると仮定しなさい。スプレッドシートに変数 x を入力する。スプレッドシートの計算能力とグラフ化能力は，2 つのモデルを生成する。1 つは変数の表であり，もう 1 つはグラフである。もしスプレッドシートで上手くいかないのであれば，変数の表を作成するためにグラフ電卓を用いるべきである。ここで次のようにグラフを描く。

x = メートル単位の距離							
q = 小数第 2 位までの度数単位の蹴る角度							
x	q	x	q	x	q	x	q
5	4.21	17	9.15	29	8.94	41	7.67
6	4.94	18	9.22	30	8.84	42	7.56
7	5.61	19	9.31	31	8.74	43	7.46
8	6.22	20	9.35	32	8.64	44	7.36
9	6.77	21	9.37	33	8.54	45	7.25
10	7.25	22	9.36	34	8.43	46	7.15
11	7.68	23	9.34	35	8.32	47	7.05
12	8.05	24	9.30	36	8.21	48	6.96
13	8.36	25	9.25	37	8.10	49	6.86
14	8.63	26	9.18	38	8.00	50	6.77
15	8.84	27	9.11	39	7.89		
16	9.02	28	9.03	40	7.78		

グラフのプロット

分散点をとり，ちょうど合う直線(もしくは曲線)を描く。



数学的解決を得る

- 上記のモデルから，点 C からだいたい 21m のところで蹴る最大角は 9.37° であることが分かる。それはだいたい $\frac{21}{150} \times 100 = 14\,\%$。与えられた直線 CE の地点である。ここで $CE = 150$ である。
- ある選手が $x = 5$ から $x = 21$ まで与えられた直線上の地点を動くならば，蹴る角度の値は 4.21° から 9.37° まで増加する；$x = 21$ から点 E まで進むにつれて，キックが成功するチャンスは減る。

モデルを試す

- モデルを立証するために，友達と一緒に最も近くのフットボール場を訪れなさい。距離を決定するために測定テープを，角度を測定する分度器を利用しなさい。計算を実行するために計算機を利用しなさい。
- 不確かな結果が得られた場合に，モデルを修正するために幾つかの提案しなさい。

方向付け

- 補間法(内挿法)の概念は，x が分数の値であるとき，蹴る角度を決定するのによく用いられ得る。
- 補外法(外挿法)の概念は，$x = 50$ を超えて蹴る角度を決定するのによく用いられ得る。

限界

蹴る角度に影響を及ぼしている要素を持ち込む限界は，ゴールポストが楕円の曲線上すなわち卵形線上よりもむしろ直線に立っていると見なしている点である。

4.2 数学的モデリング能力の記述

上記の問題に示される数学的モデリングの手順に即して，3.3で示した数学的モデリング能力を具体的に記述していく。

「1. 関連する変数」では，はじめに提示される問題を解く際に必要とされる様々な変数を導出する能力(3a)が，まず必要となる。ただし，ここでモデラーが導出する変数は，必ずしも，数学的解決を前提とはしていない。

「2. 仮説を立てる」では，先に導出した変数の中から，三角比のスキルを用いれば定式化できるような変数を選択する能力(1a)が必要となる。その際，(a)(b)といった場面を単純化により，「どの地点からボールを蹴り込む角度が最大で

あるか」といった問題へ変容している。

「3. 変数を選択」では，変容した問題に対して 4 つの変数 x ，a ，b ，q を導出し，独立変数 x と従属変数 q に分けている(3b)。

「4. 数を固定」では，2 つの距離 AB と BC を固定することで，三角比による定式化が可能となる。つまり，$q = \tan^{-1}\left(\frac{25}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{18}{x}\right)$ と定式化する能力(1b)が必要である。

「5. スプレッドシートやグラフ電卓の利用」では，関数をグラフ表示する。その結果，$x = 21$ のとき q が最大になることが分かる。x が選手の鉛直距離 CD，q が $\angle ADB$ を表す変数であることを確認し(2a)，「ボールの届く高さ」や「フットボールの重さ」などの変数は排除した上で，「(a) ゴールポストは直線 AB 上に立っている」といった仮説のもとに成り立つ結果であることを確認しておく(2b)ことが必要となる。

得られた数値の妥当性を確認するために，実際にフットボール場を訪れる。ここでは，より正確な数値を弾き出すために，補間法・補外法が方向づけとして紹介されている。もし妥当でない結果が得られた場合，モデルの修正がおこなわれる。原場面を構成する変数は「1. 関連する変数」に挙げられている以外にも数多く，仮説を立てた 1 つのモデルについて検討をおこなっているに過ぎない。主に，モデルの修正や改善の際には，x や q 以外の変数も考慮する必要があるか否かを検討し(3a)，用いる変数の重みづけ(独立変数 x に対して従属変数 q)を確認する(3b)ことになる。

「限界」にあるように，解決の対象とされている問題は，既にモデル化されている現実モデルである(2b)。再帰的過程である数学的モデリングでは，例示した上記教科書に手順として示されているように，モデルの修正や改善が進行するとは限らない。むしろ，各能力を補完し合い，検討・吟味を重ねることにより，新たなモデルを生成していく可能性が広がっていく。例えば，$x = 21$ という結論を前提として，モデルの修正・改善を試みる。そのとき，フットボールの重さや大きさは一定であるから定数とみなし，「ゴールポストの中央にゴールキックを決めるためには，どれくらいの角度で蹴り上げればよいか？」といった問題設定も想定され得る。

5．おわりに

本稿の目的は，数学的モデリング能力を同定することであった。数学的モデリングを促進する考え方(池田 1999)のうち「現実の方向」を強調する立場から，原場面の役割に注目した。その視点により，数学的モデリングの各過程を遂行するのに必要な能力である数学的モデリング能力として，次の 6 点を指摘した。

(1a) 自身の数学的スキルに合うように，変数を変化させることができる。

(1b) 自身の数学的スキルに合わせて，変数間の関係を構築できる。

(2a) 得られた結果は，どの変数に由来するものであるか確認できる。

(2b) 参照している変数は，条件付与なされたものであることが確認できる。

(3a) 問題を構成する変数を見出すことができる。

(3b) 独立変数と従属変数に変数を区別することができる。

次に，VCE が示す数学学習に沿って編纂されている数学教科書“*General mathematics*”内の数学的モデリング問題「ゴール角度のモデリング」を参照した。そこに示されている数学的モデリングの手順に即して，上記の数学的モデリング能力を具体的に記述した。

本稿で取り上げた数学的モデリング能力は，図 1 に示される数学的モデリングの図式の理想的な過程進行を前提としている。実際の数学的モデリングの進行はモデラーによって異なり，その進行を特定することは容易でない。けれども，予め数学的モデリング能力を特定しておくことで，数学的モデリング指導や評価に活かすことが期待できる(松嵜・北島 2001)。

脚注

１）平成 13 年 12 月 5 日付讀賣新聞朝刊。

２）数学的リテラシーの枠組みは，過程(process),

内容(content)，文脈(context)の 3 側面からなる。「過程」の側面の 1 つにモデリング・スキルが含まれており，次の 8 項目が列挙されている(OECD 2000, p.51)：
－モデル化されるように分野や場面を構築する
－(「現実」から「数学」に翻訳していることを意味する)数学化すること
－(「現実」の言葉での数学的モデルの解釈を意味する)反数学化(de-mathematising)すること
－(数学の範疇で作業をおこなう)モデルへの取り組み
－モデルを確認する
－モデル及びその結果の批評に関する反省，分析，提示
－モデル及びその結果についてコミュニケートすること(得られた結果に関する限界を含む)
－モデリング過程のモニタリングとコントロール

３) 次の 5 点に焦点をあてた実践・検討をおこなっている(p.11)。
1) グラフ表現による解釈
2) 数値的表現による解釈
3) 代数的表現の作成
4) 代数的表現の物理的意味の解釈
5) 代数的表現の検討・修正

佐伯(2000)は，「①モデル式の作成」「②物理的意味の解釈」「③モデル式の検証・評価」という 3 つの数学的モデリング能力を学年進行に伴い徐々に高めることを意図して，数物ハンズオンの教材開発をおこなっている。

４) プログラムを構成するのは，モデリング構成要素(strand)と呼ばれており，次の 4 つの数学的モデリングが示されている(p.44)：
C1) 問題をはっきりと特定する能力
C2) 適当なモデルを定式化する能力：変数を選択し変数間の関係を見つける
C3) 以下を含む，数学的問題を解く能力；数学的解法，解釈，確認，評価／精緻(refinement)
C4) 記述形式および口頭形式で，結果をコミュニケートする能力

５) 次の 7 つの学習領域が設定されている：「数領域」（レベル 1－6)，「空間領域」（レベル 1－6)，「計測とデータ領域」（レベル 2)，「計測領域」（レベル 3 から)，「チャンスとデータ領域」（レベル 3 から)，「推論とストラテジー領域」(Board of Studies 2000)

参考・引用文献

池田敏和 (1998). 第 4 章：実世界に役立つ数学. 樋口禎一・細川尋史・池田敏和 [編]. *数学の才能を育てる* (pp.87-109). 牧野書店.

池田敏和 (1999). 数学的モデリングを促進する考え方に関する研究. *日本数学教育学会誌：数学教育学論究, 71・72*, 3－18.

国立教育政策研究所[編] (2002). *生きるための知識と技能－OECD 生徒の学習到達度調査(PISA)2000 年調査国際結果報告書－*. ぎょうせい.

佐伯昭彦・氏家亮子・槻橋正見 (1999a). 数学的モデリング能力の段階について, *第48回北陸四県数学教育研究大会論文集*, 67.

佐伯昭彦・氏家亮子・槻橋正見 (1999b). 実現象データを解釈する数学的モデリング能力の段階について. *第32回数学教育論文発表会論文集*, 495-500.

佐伯昭彦[代表] (2000). *数学と物理を関連づけた総合カリキュラムに関する実証的研究－身近な自然現象を取り入れた実験・観察型授業－*. 平成 10 年度～平成 11 年度科学研究費補助金(基盤研究(C))研究成果報告書.

佐伯昭彦・氏家亮子 (2001). 数学的モデリング能力の変容について. *第50回北陸四県数学教育研究大会論文集*, 64.

佐伯昭彦 (2001). 実現象データを解釈する数学的モデリング能力について－「お湯の冷め方」実験のデータ解釈－. *第 34 回数学教育論文発表会論文集*, 295-300.

佐伯昭彦[代表] (2002). *生徒個々の数学的モデリング能力に応じた総合学習の教材開発に関する研究*. 平成 12 年度～平成 13 年度科学研究費補助金(基盤研究(C))研究成果報告書.

清水美憲 (1987) 数学的問題解決における問題意識と「問題」の変容に関する一考察. *筑波数学教育研究, 6*, 15-22.

瀬沼花子 (2002a). 「生きるための知識と技能」(その 1)数学的リテラシー評価. *教育科学：数学教育, 532*, 60-63.

瀬沼花子 (2002b). 「生きるための知識と技能」(その 2)ペーパーテストによる評価の工夫. *教育科学：数学教育, 533*, 82-86.

長崎栄三[編著] (2001). *算数・数学と社会・文化のつながり－小・中・高の算数・数学教育*

の改善を目指して－. 明治図書.
松嵜昭雄 (2001a). *数学的モデリングの評価に関する基礎的研究―現実世界における問題の解決過程に焦点をあてて―*. 平成 12年度筑波大学教育学研究科中間評価論文.
松嵜昭雄 (2001b). 数学的モデリングにおける原場面の役割に関する一考察－「リレー問題」の事例分析を通じて－. *日本科学教育学会第 25 回年会論文集*, 271-272.
松嵜昭雄・北島茂樹 (2001). 原場面を視点とする数学的モデリング能力の特定と調査－課題分析マップによる変数間の関係の記述を通じて－. *第34 回数学教育論文発表会論文集*, 313-318.
三輪辰郎 (1983). 数学教育におけるモデル化についての一考察. *筑波数学教育研究*, *2*, 117-125.
Barrow,J. (1998). *Impossibility: The Limits of Science and the Science of Limits*. Oxford University Press. (松浦俊輔[訳] (2000). *科学にわからないことがある理由－不可能の起源－*. 青土社.)
Blum,W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Disukussion. *Mathematische Semesterberichte*, *32*(2), 195-232.
Blum,W. (1998). 8: On the Role of 'Grundvorstellungen' for Reality-Related Proofs: Examples and Reflection. In Galbraith,P., Blum,W., Booker,G. and Huntley,I. (eds.), *Mathematical Modelling-Teaching and Assessment in a Technology-Rich World* (pp.63-74). England: Ellis Horwood.
Board of Studies (1999). *Assessment Advice for School-Assessed CATs for 1999*. Australia.
Board of Studies (2000). *Curriculum and Standards Framework II*. Australia: CD-ROM.
Clatworthy,N. and Galbraith,P. (1987). Mathematical Modelling: Innovation in Senior Mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal*, *1*(2). 38-49.
De Lange,J. (1996). Chapter2: Using and Applying Mathematics in Education. In Bishop,A.J., Clements,K., Keitel,C., Kilpatrick,J., and Laborde,C. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp.49-97). Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
Galbraith,P. and Clatworthy,N. (1990). Beyond Standard Model: Meeting the Challenge of Modelling. *Educational Studies in Mathematics*, *21*, 137-163.
Ikeda,T. and Stephens,M. (1998). Some Characteristic of Students' Approach to Mathematical Modelling in the Curriculum on Pure Mathematics. *Journal of Science Education in Japan(Kagaku Kyoiku kenkyu)*, *22*(3), 142-154.
OECD (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills: A New Framework for Assessment*. France: OECD Publications.
OECD (2000). *Measuring Student Knowledge and Skills: The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy*. France: OECD Publications.
OECD (2001). *Knowledge and Skills for Life: First Results from the OECD Programme for International Student Assessment (PISA) 2000*. France: OECD Publications.
Rehill, G. and McAuliffe, R. (1999a). *Macmillan Senior Mathematics: General Mathematics (Third Edition)*. Australia: Macmillan Education Australia Pty Ltd.
Rehill, G. and McAuliffe, R. (1999b). *Macmillan Senior Mathematics: Specialist Mathematics (Third Edition)*. Australia: Macmillan Education Australia Pty Ltd.
Rehill, G. and McAuliffe, R. (1999c). *Macmillan Senior Mathematics: New Futher Mathematics (Third Edition)*. Australia: Macmillan Education Australia Pty Ltd.
Rehill, G. and McAuliffe, R. (1999d). *Macmillan Senior Mathematics: Mathematical Method: Units 1 & 2 (Third Edition)*. Australia: Macmillan Education Australia Pty Ltd.
Rehill, G. and McAuliffe, R. (1999e). *Macmillan Senior Mathematics: Mathematical Method: Units 3 & 4 (Third Edition)*. Australia: Macmillan Education Australia Pty Ltd.
Stillman,G. (1998). 25: The Emperor's New Clothes? Teaching and Assessment of Mathematical Applications at the Senior Secondary Level. In Galbraith,P., Blum,W., Booker,G. and Huntley,I. (eds.), *Mathematical Modelling-Teaching and Assessment in a Technology-Rich World* (pp. 243-253). England: Ellis Horwood.
Stillman,G. and Galbraith,P. (1998). Applying Mathematics with Real World Connections: Metacognitive Characteristics of Secondary Students. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(2), 157-195.
Stillman,G. (2000). *The Impact of School Based Assessment on the Implementation of a Modelling/ Applications Based Curriculum: An Australian Example*.Tokyo, Makuhari: ICME9:TSG9 Presentation by distribution.
Stephens,M.・柳本哲 (2001). *中学校数学科・新しい授業づくり 8：総合学習に生きる数学教育*. 明治図書.