筑波数学教育研究　第 21 号　2002

研究論文

教授学的状況理論にもとづくコンセプションモデルに関する一考察

A study about the Conception Model basing on the theory of didactical situation

宮川　健 (Takeshi MIYAKAWA)
グルノーブル大学大学院
(Université de Grenoble, France)

本稿の目的は，フランス数学教授学におけるコンセプションモデルの役割・位置づけを明らかにするとともに，このモデルを用いて分析をおこなうことによって生じる具体的な仮説構成方法を示すことにある。そのため，まずコンセプションモデルの前提となるフランス数学教授学と教授学的状況理論を概観し，状況を考慮しつつ子どもの知識をモデル化するコンセプションモデルについて解説した。その後，コンセプションモデルを実際に用いて線分の線対称作図を分析し，子どものもつであろう知識に対するひとつの仮説を導いた。

The aim of this paper is to show the role and the position of the Conception Model in the French didactic of mathematics, and to give a hypothesis about students' knowledge, deduced by the analysis of the construction problems of the axial symmetry using the Conception Model. To reach at this aim, we present the idea of the theory of didactical situation from which the Conception Model has been constructed. Then we have tried an a pirori analysis to give out a hypothesis.

キーワード：フランス数学教授学，教授学的状況理論，コンセプション，状況

１．はじめに

フランスでは 1970 年代に G Brousseau, G. Vergnaud らによって数学学習・指導の改善を目指す数学教授学(以下，「フランス数学教授学」と呼ぶ)がひとつの学問･研究領域として始まり，現在まで 200 本以上の博士論文が書かれてきた。今日ではフランス国内にとどまらず，スイス・カナダ・アフリカなどの仏語圏地域やスペイン・ブラジルなどの非仏語圏地域においても，この教授学理論に基づいた研究が盛んにおこなわれている。本稿では，フランス数学教授学の中心理論である教授学的状況理論を概観し，近年そこから生じたコンセプションモデルを紹介するとともに，モデルを用いた具体的な分析例と仮説を示す。

第二章では「教授学的状況理論」と「コンセプションモデル」が前提とするフランス数学教授学の目的を明確にする。第三章ではいままでは数学教授学の基盤である「教授学的状況理論」を主体と環境(milieu)の相互作用の視点から概観する。第四章では，子どもの知識をモデル化するコンセプションモデルを概観し，その位置づけを示す。第五章では，コンセプションモデルを実際に用いて線対称の作図問題に対する作図過程のアプリオリ分析をおこなうことによって，そこから生じる仮説を示す。

２．フランス数学教授学

まず「教授学的状況理論」と「コンセプションモデル」を知る上で前提となるフランス数学教授学の目的を明らかにしたい。

数学教授学の最終目的は，教育に関わるものとして，日本や他国でも考えられているように，フランスにおいても数学を教える最良の方法を生み出すことである。そこで，フランス数学教授学は，実際の教育を批判するのではなく，日

頃から目のあたりにしている子どもの学習における困難性は，実際いかなる性質を持つのか，われわれは本当にそれを理解しているのか，その根本問題は何か，といった疑問を投げかた。

1970 年代に始まったフランス固有の数学教授学のアイデアは，次のように述べられる。

「フランスにおける「数学教授学 (didactique des mathématiques)」(不幸にも？)という名のもとにおこなわれている理論研究の起源は，教育の現象，一般に理論的考察よりもともすれば経験主義的態度や見解を招きやすい現象を，合理的な方法で描写し説明することが可能である，という考えにある。」(Bessot, 1998, p.1)

「我々の目的は，数学教育・学習に関わる現象・過程における知識の基本体系を構築することである。」 (Balacheff, 1990, p.269)

つまり数学教授学とは，経験によって語られかねない教育の現象や数学上の知を理論的・科学的に説明，記述し，明らかにする試みであり，それにより現象そのものとその性質を知ることを目的としている。現象・知のモデル化が研究の目的とも言える。ここで現象とは教授学的システム(système didactique)，つまり「数学の知」・「子ども」・「教師」の三要素を中心とするシステムであり，それぞれの性質，相互関係に焦点があてられる(Chevallard, 1991, p.14)。そしてそれらに基づき，学習における子どもの知識獲得・概念形成の条件を探るのである。現象を理論的に把握しなければ信頼性のある指導法は開発できないというスタンスである。

ここで注意しなければならないのは，フランス数学教授学は他国(例えばドイツ)，他領域で「教授学」と呼ばれているものとは異なることである。実際，Bessot の引用の「不幸にも？」は他に名前の付けようがなかったことを物語っている。フランスの場合，「教授学」といった学問の中に「数学教授学」が位置づけられているわけではない。

これらの目的を達成するために，フランスでは *Recherche en didactique des mathématiques*(数学教授学研究)と言うレビュー紙が 1980 年から刊行され，また同年から研究者を対象としたサマースクールが 2 年に一度始まった。これは，新しくできた理論を紹介する講義と，研究者それぞれが自らの研究にその理論を用いることができるようにするための演習からなる。そのため，基礎となる理論のほとんどは研究者によって共有され，多くの共同研究がなされている。

３．教授学的状況論[1)]

Brousseau は前出の数学教授学の目的に基づき，子どもが学習状況においていかに数学上の知を受けとめ獲得するか，その過程，その状況のモデル化を試みた。70 年代から 80 年代に発展してきた，いまでは数学教授学の基礎理論である「教授学的状況理論(théorie des situations didactiques)」がそれである。

3.1　心理学的前提

子どもの学習状況をモデル化し，知識獲得の条件を明確にするため，Brousseau は心理学的前提をおいた。つまり，「主体は矛盾や困難，不均衡を生成する環境(milieu)に適応しながら学習する」(1986, p.48)と，学習が適応によっておこなわれるとするものである。この仮定はピアジェ心理学における主体は環境(milieu)に対して同化と調節を繰り返しながら学習するという均衡化理論に基づいたものである。ここでのキーワードは「環境(milieu)」(以下，鍵括弧付きの環境は milieu を示す)の概念である。Brousseau はこの概念を「反目システム(système antagoniste)」と定義する。つまり，「環境」という語で「状況理論は知(savoir)に特別な，もしくはその側面に特別な環境のみをモデル化する」(1988, p.312)のであり，学習者が何らかの働きかけ(作用)をすればそれに対し何らかの情報や反発(反作用)を与えるものとした。この「環境」の定義の必要性は，教授状況のモデル化において，環境による子どもへの適切な反応を知るためでもあり，規定するためでもある。

ここで，「環境」は不変なものではない。子どもによって「環境」は異なり，働きかけの強さも異なる。

学習状況を子ども(主体)と「環境」でモデル

化すれば，図 1 のようになる。主体が「環境」と相互作用をおこなっているのである。

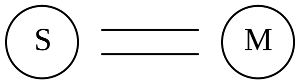

図 1：S は主体，M は「環境」を示す。

ここで「環境」は反目システムとして主体にフィードバックをおこなうが，これには，子どもが自らの行動を軌道修正することができたり，いくつもの解答の中からある解答を選択できたりさせることができる，学習において意義のあるものが求められる。

3.2　教授学的前提

主体と「環境」のモデル化には，教師は含まれていない。そこで教授学的状況理論では,「教授学的意図のない環境(milieu)は我々が主体に獲得するよう望んでいる知識を主体に引き出させるためには明らかに不十分である」(1986, p.49)とする教授学的仮定にもとづき，「環境」に教えるべき概念を獲得できるよう働きかける必要性をあげている。つまり，教師の必要性である。

3.3　無意識な教授学的状況

子どもは「環境」との相互作用によって自ら知識を獲得し，自らその知識を教育以外の文脈においても用いることができるように学習を進めるべきとするが，同時にその「環境」は教授学的な意図を含まねばならないのである。したがって，ある概念の学習状況において，問題設定など教師が介入するが，その問題を教師の問題ではなく，子ども自身の問いとし，その答えに対しても自分自身がその状況に内在する論理のみに頼って答えを出せるような(生徒にとってはそう思えるような)状況が必要になる。子どもにとっては自ら知識を発見・獲得できたように学習状況を構築する必要がある，とするのである。このような状況は「無意識な教授学的状況(situation a-didactique)」と呼ばれる(1986, p.49)。これを図式にすれば，図 2 のようになる。つまり, 教師による働きかけはおこなわれているが，子どもにとっては自ら学習しているように思える状況である(図 2 において点線は教師の介入が子どもにとって不透明であることを示す)。

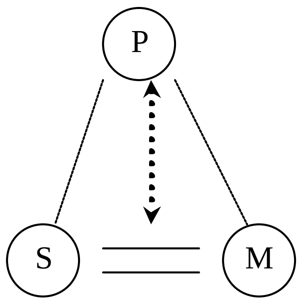

図 2：S は主体，M は「環境」，P は教師を示す。

また,「環境」という語を用いて説明すれば，子どもが教師の要求ではなく,「環境」の要求として，対象となる概念との関係を形成し，その関係を改善できるような状況となる。

3.4　教授学的状況と非教授学的状況

「無意識な教授学的状況」はより大きな状況の一部である。つまり，生徒が「環境」に対しより独立した形で相互作用し，できるだけ有益な相互作用ができるように，教師は「無意識な教授学的状況」をより大きな状況の中から探すのである。そして，そのより大きな一般的な状況を Brousseau (1986)は「教授学的状況(situation didactique)」と呼んでいる。

また,「無意識な教授学的状況」は「非教授学的状況(situation non-didactique)」とは異なる。「非教授学的状況」は図 1 のように表せる教師の教育上の意図がない状況である。例えば，子どもが自転車に一人で乗る練習をしているとする。ハンドルを右や左に動かすと自転車は倒れてうまく乗れない。この場合，自転車という「環境」に子どもはハンドル・ペダルを動かすことで働きかけ,「環境」は倒れるということでフィードバックを与える。

この場合は，教師の教育上の意図が含まれていないため「非教授学的状況」となる。

3.5　無意識な教授学的状況の例

「無意識な教授学的状況」の例をあげよう。作図動画ソフトが「無意識な教授学的状況」の「環境」として機能することが最近ではよく知られている(Laborde & Capponi, 1994; etc.参照[2])。

作図動画ソフトでは作図過程で付与された図的性質を保存したまま図形を移動･変形できる。

そのため，作図がその与えられた図的性質に基づいていなければ，作図後移動した際にもつべき性質が失われてしまう。この視覚的フィードバックが作図過程を反省させ作図手順，そこに内在する図形の性質を学んでいけるとするものである。

またその際に，作図動画ソフトで重要な役割を果たす機能は作図に使うことのできる道具を設定できることである。例えば，コンパスと鉛筆の環境，もしくは垂線は引けるが平行線は引けない環境に設定できる。このことは「環境」の質，数学の知との関わりを大きく変えることになる。

例えば，線対称の作図を考える。作図動画ソフトが線対称作図機能を持っていては，子どもの活動はもとの図形を動かし作図された線対称図形の変化を見ることによって，線対称に対する視覚的イメージを鍛えるのみで終わってしまう。そこで，その機能を省き，使える道具を点・線分・直線・円・垂線・平行線・記号に限る(図3)。すると，子どもは A に線対称である点 A' を作図するために，ふたつの線対称の点を結んだ直線が対称軸に垂直に交わること，それぞれの点が軸から等距離であること(線対称の定義)を用いなければならない。これらの性質を用いなければ，作図後の移動による妥当性判断に耐えられない。例えば，図 4 では A を通る直線を対称軸に対し感覚的に垂直に引いたため，作図後の移動では垂直を保存せず，かつ線対称である線分の長さも違えば線分の傾きも大きく異なってしまっている。このことが「環境」からのフィードバックとして機能すれば，子どもはどうすれば移動による妥当性判断に耐えられる線対称を作図できるかさらに探求することになる。

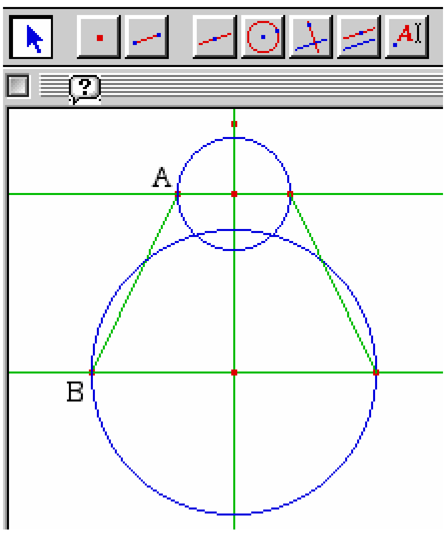

図　3：線分 AB の線対称作図。使用可能な道具のすべてをボタンで表示した。

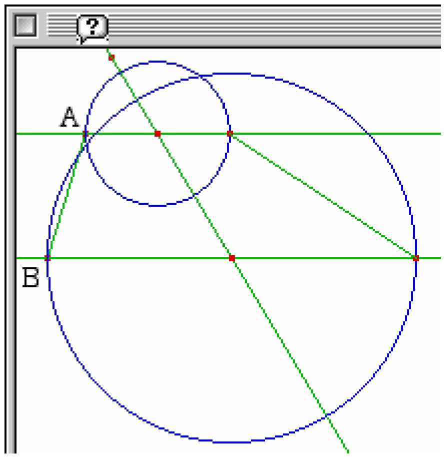

図　4：軸への垂線が感覚的に引かれていたため，軸を移動することによって線対称図形が壊れてしまった。

図 3 では，「垂線」を道具として使用可能にしたが，「垂線」を省けばさらにその作図方法が必要になり，与えられた道具から工夫して作図しなければならなくなる。教師が「環境」に制約を適度に加えることによって求められる目的への設定が容易になるのである。

このように，作図動画ソフトは，視覚的フィードバックを子どもに与える点で「無意識な教授学的状況」の「環境」として機能するといえる。

しかし，ここで注意しなければならないのは，「環境」からのフィードバックをこどもが認識できない場合，意味をなさない場合もあることである。上の例であれば，子どもが「動かしたら線対称ではなくなってしまうのは当然じゃない」など，作図及び作図ソフトの性質・機能を把握していなければ，「環境」は「無意識な教授学的状況」になるようには機能しない。

3.6　教授学的状況理論のまとめ

教授学的状況理論を概観して，モデルとしてふたつの意義があることがわかる。一つ目は，主体と「環境」，教師の三つの要素で現実の学習・教授の状況をモデル化することであり，二

つ目は仮定を提起することによって望ましい理想的な学習モデルを提案し，学習に必要な条件を提起していることである。つまり，規範となる学習モデルに対して現実の学習・教授状況を特徴づけるのである。

教授学的状況理論に関して注意しなければならないのは，第一に心理学でおこなわれている「状況論」とはまったく異なるということである。そして，第二に教授学的状況理論がピアジェ派の心理学とも異なることである。主体と「環境」のモデル化において，ピアジェのアイデアを利用はしているが，それ以上のものではない。実際，数学教授学では，心理学と異なり「主体」の心理を知ることを目的としていない。教授学的状況理論はその状況をモデル化し，そこから望ましい教授・学習の条件を導き出しているのであって，「主体」の心理には触れていない。

また，本稿では取り上げなかったが，このモデルにおいて重要な要素として，教師の子どもへの影響を理論化する「教授学的契約(contrat didactique)」，学習過程における知識獲得の条件となる「dévolution」と「制度化(institutionnalisation)」があげられる。また別の機会に取り上げたい。

４．コンセプション

近年，発展してきたコンセプションモデルは，前章で取り上げた「教授学的状況理論」に基づいて構築された。本章では，コンセプションモデルを紹介するとともに，数年前までおこなわれてきたコンセプション研究と教授学的状況理論に対するコンセプションモデルの位置づけを示す。

4.1　子どもの知識と教授学的状況理論

Brousseau の教授学的状況理論は，状況をモデル化するひとつの道具を与え規範となる望ましい状況を提起するとともに，そのモデルに対照することによって学習・教授状況の詳細な分析を可能にした。しかし，子どものもつ知識の状態はこのモデルからは明確でない。実際，子どもの知識は「環境」からのフィードバックをフィードバックとして受け止め理解するために必要であり，フィードバックが機能した場合には子どもの知識がどこかで機能していることになる。では，子どもの知識をいかに特徴づけるか？

現在までフランス数学教授学では，「コンセプション」の研究が子どもの知識・考えの研究のひとつとしておこなわれてきた。

4.2　これまでのコンセプション研究

数学教授学におけるコンセプション研究は，子どもの知識・考えを明確にするひとつの研究分野として古くからおこなわれてきた(Artigue & Robinet, 1982 ; Grenier, 1988 など)。英語圏ではミスコンセプション研究が盛んにおこなわれているが，ミスコンセプション研究が主に認知的側面を扱うのに対し，フランスにおけるコンセプション研究では認識論的側面が多く扱われる点，「誤答のパラダイム」[3)]に基づいている点において大きく異なる。

Artigue (1990)はこの概念によって，「ある数学概念に対し多様な観点が可能であることを明らかにし，その概念を扱う表現や方法を区分し，それらがある種の問題解決に多かれ少なかれよく適応していることを明らかにする」(p.265) といった教授学研究の必要性に答えることができるとする。これらのことはコンセプションの性質をよく示している。例えば，「関数」という一概念も，対応関係，グラフ，代数式，表などで表され，様々な見方が可能であり，それぞれの表記・扱いは明らかに異なる。代数式で表された関数が演算には大変有効なのに対し，グラフは視覚的にある関数の性質を簡単に知ることができる。つまり，それぞれの見方には，ある正答を与えることができる有効範囲があるのである。

4.3　コンセプションモデル

コンセプション研究は古くからおこなわれてきたものの，その概念は明確に定義されず，上述の必要性に答えることができるものとして扱われていた (Artigue，ibid，p.266)。しかし近年，Balacheff (1995a, 1995b, 2000)は数学教授学が採用する「誤答のパラダイム」に基づき，かつ Brousseau の「教授学的状況理論」における「主体」と「環境」の相互作用から，その形式的な

定義・モデルを与えた。この定義は Artigue が上で示しているコンセプションの性質を備えたものである。

いままでのコンセプション研究はフランス数学教授学における位置づけが曖昧であった。そこで，コンセプションモデルにより，子どもの知識をモデル化する道具として，しかも「教授学的状況理論」における「主体」と「環境」の相互作用から生じる知識のモデルとして位置づけられたのである。

コンセプションモデルにおける注目すべきアイデアは，子どもの知識を状況によって異なるものとし，コンセプションの概念で「教授学的状況理論」における「主体」と「環境」の相互作用を知識の一側面としてモデル化した点である。実際，われわれ研究者は,「教授学的状況理論」の場合と同様，子どもの頭を開けて知識というものを知ることができるわけではなく,「主体」の中身は知ることができないと考えている。そこで，子どもに問題を与えたときにそれに対する反応を観察することによってのみ，子どもの持つ知識を予想できるのである。そして，子どもの反応は常に状況に依存しているのである。

例えば，日常生活では買い物をする際に足し算・引き算ができるのに，数学の授業で同じ計算を求めるとできないことなど，教室とその外では本質的には同じ数学知識が必要であっても，子どもは同じように使えないことが報告されている(Nuñes et al, 1983)。つまり，子どもの知識はその状況に依存すると見るのが妥当だと考えられる。

4.4　コンセプションの形式化

Balacheff(1995a, 1995b)はコンセプションを四つの組(P, R, L, S)で特徴づけた。

P：問いの集合(ensemble de problème)
R：操作子・規則の集合(ensemble d'opérateurs)
L：表記法(représentation)
S：制御・検査(コントロール)構造(structure de contrôles)

それぞれを説明すると，P は「問いの集合」であり,「主体」と「環境」の相互作用によって生じた問いの集まりである。R は「操作子・規則の集合」であり，ある問いを別の問いに変換したり，答えを与える操作をおこなうものの集まりである。L は図的表記や代数表記，グラフ表記などの「表記法」である。S は,「制御・検査構造」であり，ある問いに対しある操作子を用いて答えを出した場合，その答えを「問い」の答えとして正しいと判断する妥当性を与えるものである。また「制御・検査構造」は用いた操作子の正当性をも認めるものである。「環境」のフィードバックを認識するのもこの「制御・検査構造」である。なぜならば，それがフィードバックを参照しながら出した答えの妥当性を認めるからである。ここには，フランス数学教授学で常に仮定としてそれに基づいている合理的主体(sujet rationnel)が見られる。つまり，子どもは何も考えずに答えを出すのではなく，合理的に自分の論理で答えを出すことを示す。

またこれら四つの要素の組をコンセプションとした理由は,「教授学的状況理論」の「主体」と「環境」の相互作用を考慮すれば，次のように考えられる。あるひとつの手続き(操作子・規則)を用いてある問いに答える際, その手続きはその問い，つまり「環境」の要求に応じて用いられたのであり，しかもその問い・「環境」の表記法だから用いられ，かつそれを子どもが正しいと判断したから用いられたのである。実際，同じ手続きでも表記法が異なれば，解ける問いも異なり，正しいと判断する制御構造が異なれば問いに与える答えも異なってくる。

ここで，形式的に記述すれば，ある問い $p_1 \in P$ に対し，ある規則 $r_1 \in R$ は，ある新しい問い p_2 に"$r_1(p_1) = p_2$"と変換するか，もしくはある答えを出し，制御・検査構造の $s \in S$ が"$s(r_1(p_1)) =$ 正しい"とする。

5．コンセプションモデルを用いたアプリオリ分析例

本章では，コンセプションモデルを用いて具体的に子どもの知識のモデル化を試みる。しかし，実際に実験をおこなってデータを取っていないのでその前段階のアプリオリ分析をおこない，そこから生じる仮説を提起する。併せて，

コンセプションモデルが，教授学的状況理論をどのように反映しているかを示す。

5.1　アプリオリ分析

フランス数学教授学の研究方法論では，実験は数学的な分析によって生じた仮説を実証するものとして位置づけられる。それは，量的に仮説を実証するのではなく，「アプリオリ分析」と呼ばれる分析によって数学的・理論的に導かれた，ある種必然性をもつ仮説を，実験結果が生成的な例(exemple générique)となるように，実証するのである。

「アプリオリ」とは「まえ」を意味するが，認識論的意味で「まえ」であり，時間的な「まえ」を示す実験の事前分析とは異なる。本来，「教授学的状況理論」において，実際に生じた状況が理論から導かれる多様な状況の中に，その位置・性質を示すために用いられていた。現在ではより広く数学教授学研究全般に用いられている。

本稿では，コンセプションモデルを実際に用いて線分の線対称作図におけるアプリオリ分析の一部を紹介し，そこから導かれる仮説を示す。

5.2　線対称作図におけるアプリオリ分析

コンセプションモデルを用いて具体的に子どもの知識のモデル化を試みる。問題として先ほども用いた線対称の作図を考える。子どもが図5 のような作図を解答として与えたとする。簡単に解説すれば，これはふたつの線対称の点を結んだ直線が軸に垂直ではなく水平に引いた「水平関係」と呼ばれる手続きを用い(Hart, 1981; Grenier, 1988 等参照)，直線 AA', BB' を引き，交点を中心とした円を描くことによって軸から等距離の点を求めている。

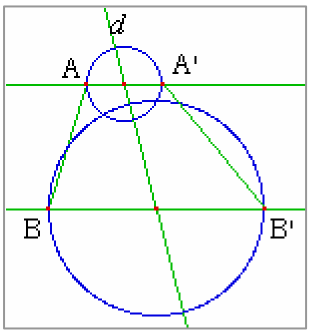

図 5：垂直を水平で作図している。

コンセプションモデルを用いて作図過程を分析すると次のようになる。ここで，表記法は常に図的なものなので省略する。

○第一段階

p_1: $A'B' = S_d(AB)$となるように線分 A'B'を作図する[4)]

r_1: $P'Q' = S_d(PQ) \Rightarrow P' = S_d(P)$かつ $Q' = S_d(Q)$

s_1: 図形もしくはイメージから

p_1は最初の「問い」である。この段階は，実際の作図はおこなわれなく，問いを変換する段階である。規則 r_1は作図問題の本質に大変強く結びついたものである。実際，線分を作図する際には，端点や点を最初に考慮しなければならない。制御・検査構造のひとつ s_1は規則 r_1の機能を正しいと受け入れるものである。

○第二段階

p_2: $A'B' = S_d(AB)$を作図するために，$A' = S_d(A)$（もしくは $B' = S_d(B)$）となるように A'（もしくは B'）を作図

r_2: A (B)を通る水平な直線を引き，交点から A (B)と等距離な点 A' (B')をとる

s_{21}: PP'が水平かつ $PM = MP' \Rightarrow P' = S_d(P)$（M は交点）

s_{22}: 水平と等距離のグローバルなイメージ

p_2は第一段階で変換され表出した「問い」である。この段階で，もし A'を決定するために円が用いられれば，等距離の点を作図するために，円の作図が等距離の妥当性判断(コントロール)になる。s_{21}は問い p_2を解くために規則 r_2を選択した制御・検査構造のひとつであり，s_{22}はこの段階における実際の作図(水平と等距離)の妥当性を認める制御・検査構造のひとつである。作図活動の本質からこのふたつの種類のコントロール(選択と妥当性)は作図活動のすべての段階に存在する。また，規則 r_2は対称軸が鉛直の場合に教師にとって正しい解答を与える。

○第三段階

p_3: A'と B'がすでに決定されている場合に，$A'B' = S_d(AB)$となるように線分 A'B'を作図

r_3: 二点を結ぶ線分を引く

s_{31}: $P' = S_d(P)$かつ $Q' = S_d(Q) \Rightarrow P'Q' = S_d(PQ)$

s_{32}: 線分に対するグローバルなイメージ

s_{33}: いままでの手続き(r_1, r_2, r_3)

p_3は問い p_1に対して第二段階で残っている問いである。s_{31}は問い p_3を解くために r_3を選択した

制御・検査構造のひとつであり，s_{32}は実際の作図の妥当性を認める制御・検査構造のひとつである。s_{33}は最初の問い p_1に対する作図の妥当性を認める制御・検査構造のひとつである。つまり，「いままでの手続きが正しかったのだから，作図 A'B'も正しい」というものである。この段階ではしばしば視覚的イメージが制御・検査構造のひとつとして機能するが(「環境」によるフィードバック), 図 5 を解答として受け入れた子どもが，線対称に対する折ったりひっくり返したりする視覚的イメージをこの問題で用いているとは考えにくい。なぜならば，AB と A'B'は長さも異なり, 線分の傾きも異なるからである。したがって，s_{33}が視覚的イメージによる制御・検査構造を抑制していると考えるのが妥当である。しかし，この制御・検査構造のひとつ s_{33}は提起された問題・状況に依存する。

5.3　分析から導かれる仮説

第三段階の制御･検査構造のひとつ s_{33}に注目する。子どもが図 5 を答えとして与えた場合，ひとつの矛盾が生じる。

図 5 の図形を与えた子どもに図 6 のような図形が線対称か判断する問題を与えた場合，そのほとんどは正しい答えを与えることがある。しかし，また別の機会に作図問題を与えると図 5 のような解答を与えるのである。一見，図 5 では作図された図形が「環境」によるフィードバックとして子どもの視覚的イメージに機能しそうだが，図 5 を与えることはフィードバックが機能していないことを意味する。なぜか？

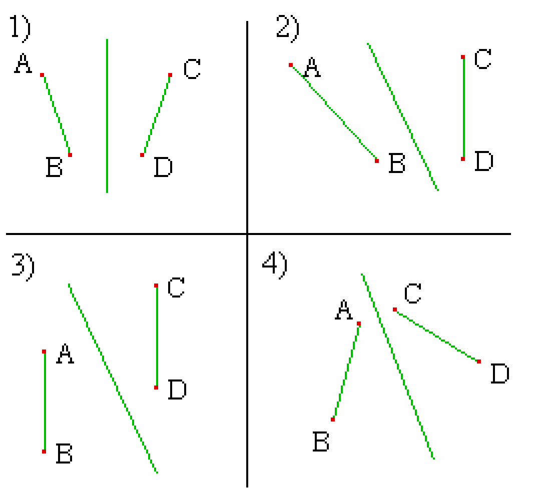

図 6：直線に対して線対称な線分の組はどれですか？

コンセプションモデルによって，このふたつの問題が本質を異にすることがわかる。図 6 の問題におけるコンセプション分析はおこなわないが，作図動画ソフトやコンパスを用いて作図をしなければならないとき，視覚的イメージだけでは作図はできなく，何かしら作図手続きを用いなければならない。そこで，教室で学習した，もしくはそれから変化してしまったがいくつかの問題ではうまく正しい答えを出した操作子・規則が用いられることになる。そしてこの場合，それぞれの演算子・規則に対し制御・検査構造が働くため，視覚的イメージによる検査構造を抑止すると考えられる。実際，先行研究では，方眼紙上で作図をおこなった場合，方眼が入っているために等距離を水平方向に作図する場合が多いことが報告されている(Grenier, 1988)。

対し，図 6 の問題では，用いられる規則は，常に自らがもっている視覚的イメージ，もしくは折ったりひっくり返すことによって得られる視覚的イメージと比較することである。つまり，作図で必要とされた手続きは必ずしも必要がないのである。

したがって，次の仮説が導かれる。

仮説：線対称に関する正しい視覚的イメージを持っていても，線対称作図の答えとして視覚的イメージに対応しない答えを与える。

これらのことは，子どもの視覚的イメージを知るだけでは説明できないのである。例えば，「線対称とはどういうものですか？」と子どもに尋ねても，それに対する返答のみで，子どもの知識，もしくはコンセプションを決定はできない。

このように教授学的状況理論に基づき，子どもの知識を状況に依存したものとしてモデル化することによって，一見観察者には矛盾するように見える子どもの行動・知識を説明する手がかりを与えることができるのである。

６．おわりに

本稿では，フランス数学教授学の中心理論である教授学的状況理論を概観し，近年そこから生じたコンセプションモデルを紹介するとともに，モデルを用いた具体的な分析例を示し，線対称作図におけるひとつの仮説を提起した。この仮説の実証は別の機会に述べる。

現在フランスでは，コンセプションモデルの別の可能性が試されている。それは，数学教授学のモデルであるコンセプションモデルを人工知能としてコンピュータに導入する試みである。実際，情報科学における可能性として，人工知能が子どもの学習を観察し，子どもの知識を認識し，働きかけ，新しい問題を与え，子どもの知識獲得を手助けすることがある。そのためには，まずコンピュータが子どもの知識状態を知ることが必要になるのである。

そこで，数学教授学における多様なモデルがコンピュータに導入される必要があるが，多くのモデルは形式化されたものではなく，情報科学における計算可能(computationnel)なモデルにはほど遠い。しかし，本稿で取り上げたコンセプションモデルは形式化され，導入可能なモデルに近いのである。

実際，2002 年現在，フランス・グルノーブルのライプニッツ研究所ではインターネット上に仮想教室を構築し，かつ人工知能に，証明妥当性判断, 子どもの知識･コンセプションの診断, 教育ストラテジーの選択を導入するプロジェクトがコンセプションモデルを用いて進行中である(Webber, 2001 参照[5])。

註

１) 本章は Brousseau (1983, 1986, 1988)を主に参考にしているが，現在では「教授学的状況理論」をまとめた *Theory of didactical situation* が英語版(1997)，仏語版(1998)ともに出版されている。

２) *Educational Studies of Mathematics*, *44*, 2000 ではPMEの特別号として作図動画ソフトを用いた証明研究の特集が組まれている。ここにも作図動画ソフトにおいて移動による図的性質の保存がフィードバックになる例が多く示されている。

３) バッシュラールの誤りに対する前提に基づいていることを示す。つまり，「誤答は，学習の経験主義・行動主義の理論で信じられている無知・不正確さ・偶然の影響ではなく，良い点やうまくいくこともあったが，現在は誤りもしくは単に適切でないと判明した以前の知識の影響である」(Brousseau, 1983, p.171) と考えるものである。したがって，誤答の捉え方・ステイタスに対するパラダイムである。

４) 本稿では簡易化のため $A'B' = S_d(AB)$は「AB と A'B'は d に対して線対称」を表す。また，P, Q は一般の点を表すために用いた。

５) もしくは http://www-baghera.imag.fr/参照。

参考文献

Artigue M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2/3), 241-286.

Artigue M. & Robinet J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *3*(1), 5-64.

Balacheff N. (1990). Towards a problématique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(4), 258-272.

Balacheff N. (1995a). Conception, propriété du système sujet/milieu. In Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (eds.) *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp.215-229). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

Balacheff N. (1995b). Conception, connaissance et concept. In Grenier D. (ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp.219-244). Grenoble: IMAG.

Balacheff N. (2000) A modeling challenge : untangling learner knowledge. In *Journées internationales d'Orsay sur les sciences cognitives: L'apprentissage* (JIOSC 2000).

Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 164-198.

Brousseau G. (1986). Fondements et methods de la didactique des mathématiques. *Recherches en*

Didactique des Mathématiques, *7*(2), 33-115.
Brousseau G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 309-336.
Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Brousseau G. (1998). *Théorie des situqtions didactiques*. Grenoble:Edition La Pensée Sauvage.
Bessot A. (1998). Introduction à l'analyse du système didactique. *Cours de DEA de didactique des disciplines scientifiques*. Université Joseph Fourier - Grenoble 1.
Chevallard Y. (1991). *Transposition didactique*. Grenoble: Edition La Pensée Sauvage.
Grenier D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse. LSD2 - IMAG Université Joseph Fourier - Grenoble 1.
Hart K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. Oxford, London: Alden Press.
Laborde C. & Capponi B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1,2), 165-210.
Nuñes, T., Carraher D., Schliemann A. (1983). *Mathematics in streets and schools*. Cambridge University Press.
Webber C., Bergia L., Pesty S., Balacheff N. (2001). The baghera project: a multi-agent architecture for human learning, In J. Vassileva (ed.) *Proceedings of the Workshop Multi-Agent Architectures for Distributed Learning Environments (AIED'01), 12* (pp. 12-17). San Antonio.