筑波数学教育研究　第 21 号　2002

研究論文

2 次不等式表現の翻訳・処理に関する調査研究

―解答困難な生徒の理解の様相―

On Interpretation and Manipulation of Representation of Quadratic Inequalities:
Aspects of Understanding of Students Who Have Difficulty Answering

伊藤　伸也 (Shinya ITOH)
筑波大学大学院数理物質科学研究科
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

本稿は，2 次不等式に関する問題の解決過程における表現の翻訳や処理に関係する知識や，それが行われるための条件を明らかにすることを目的とする。そのために，解決に至る表現の翻訳・処理過程をいくつかの主要な表現の翻訳・処理の過程に分割し，高校生に対する調査をもとに，翻訳・処理の様相を分割した過程ごとに分析する。その結果，グラフ表現から解表記への翻訳が可能であることは，解表記からグラフ表現への翻訳が可能であるための必要条件であることなどが明らかになった。

The purpose of this paper is to show the knowledge related with and the conditions for interpretation and manipulation of representation in the case of students' solving problems in quadratic inequalities. To accomplish this we conducted surveys by questionnaire and interview of high school students. The results were, for example that it was found that practicability of interpretation from the representation of the graph to the sign of the solution is a necessary condition for the practicability of converse interpretation.

キーワード：表現，翻訳，2 次不等式，関数

1. 問題の所在

1.1　2 次不等式の解法

2 次不等式を解く方法には大きく 2 つの方法が考えられる。ひとつは，2 次不等式に対して式変形をほどこすことでその解を得る方法であり，この方法は文字式に対する処理により解を求めるという点から代数的アプローチとよばれる[1)]。もうひとつは，不等式に対応する関数のグラフを用いて視覚的にその解を得る方法であり，この方法は関数を用いて解を求めるという点から関数アプローチとよばれる[2)]。

我が国の高等学校においては，それまで主として「数と式」に続く「方程式と不等式」の領域で扱われた 2 次不等式が，平成元年の学習指導要領改訂から「2 次関数」の領域で扱われている。続く平成 11 年の学習指導要領改訂においても，2 次不等式は 2 次関数の領域で扱われている。海外においても，2 次不等式に対する代数的アプローチから関数アプローチへの扱いの移行を視野に入れた研究が行われている (Dreyfus & Eisenberg, 1985; Bazzini, 2001)。この 2 次不等式の関数アプローチのよさは，代数的アプローチと比較すると，不等式の解決へ至る処理の一部が関数のグラフにより視覚的な表現に対してなされること[3)]，2 次関数の学習を活かすことができる教材であること，三角不等式や分数不等式といった多項式で表されない場合の不等式をも扱うことができる応用性にあると考えられる。

1.2　式表記とグラフ表現間の翻訳に関係する知識

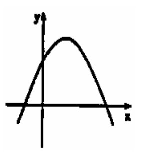
記号的なものであれ視覚的なものであれ，数学的な知識は何らかの形で内的に表象されていると考えられる。たとえば，2 次関数についてある程度知っている生徒は，それがどのような式で表されるかを思い起こしたり，そのグラフ

を描くことなく放物線状に視覚化したりと，内的に表象することができると考えられる。そして，内的表象は外的な表現により伝達可能となる。2 次関数を例にすると，$y=ax^2+bx+c$という式表記や放物線状のグラフ表現が典型的である。これらの，数学における外的表現にはいくつかの種類があり，数や文字式を初めとする記号表記と，グラフ，表，図などの視覚的表現からなる記号体系，操作的道具(manipulative material)などの構造化された学習環境の表現体系，書き言葉・話し言葉による単語や文章の表現体系に体系化される(Goldin & Shteingold, 2001)。

その中でも Even(1998)は記号体系に属する関数の表現について扱い，主に 2 次関数，2 次方程式，三角関数の式表記とグラフ表現間の翻訳について，具体例によって，異なる表現の翻訳に関係する知識として以下の 3 つの知識をあげている。

第 1 に，関数のグラフを描くためにその概形を全体的に捉えたり，x 軸との共有点など特定の点に注目するといった「異なるアプローチについての知識」が表現の翻訳に関わるとする。ここでいう異なるアプローチとは，以下の 2 つのアプローチを指す。ひとつは，式表記に対してそのグラフの概形を描くときや，関数の極値をグラフから読み取るときのように，グラフを全体的に捉え，その挙動をみる全体的アプローチ(global approach)である。もうひとつは，グラフからある特定の点の値を読み取るときや，離散的な確率変数の離散密度を見つけるときのように，グラフの 1 点について扱う点別アプローチ(point-wise approach)である。Even(1998)は，全体的アプローチが点別アプローチよりも常に有効というわけではないことを，点別アプローチを用いた解答者が全体的アプローチを用いた解答者よりも問題をうまく解決した次の例などによって示している。

問題　図は，関数$f(x)=ax^2+bx+c$のグラフである。a，b，cは正，負，0 のどれであるかをいい，その理由を説明しなさい。



$x=0$という特定の点における関数の値を読み取るという点別アプローチによって正解に至った解答者がいる一方で，関数$y=-x^2$とそのグラフを垂直方向に平行移動した関数$y=-x^2+1$など，$b=0$という特殊な関数の例からの帰納的推論によって，頂点の y 座標が係数cの符号を決めるという不適切な一般化を行い，その結果，係数cの符号が正である理由を「頂点の位置より」とか「頂点がx軸より上だから」という理由によって説明した解答者が見られた。このことなどから，全体的アプローチと点別アプローチは一方が他方より有効といったものではなく，2 つの方法を使いこなすことが最も強力であり，これら「異なるアプローチについての知識」が表現の翻訳に関わるとしている。

第 2 に，問題の対象となる関数の種類やその特性といった「提示される文脈についての知識」が表現の翻訳と関わるとする。これは，弧度法による三角関数$y=\sin x$のグラフが描かれた座標平面上に$y=\sin(x+1)$のグラフを記入する問題に対して，三角関数固有の問題ではなく平行移動についての問題にもかかわらず，三角関数について十分に覚えていないことをわびる解答者の例によって示されている。また，グラフをx軸方向に平行移動することができたとしても，その約 4 分の 1 が，原点に最も近いx軸との交点を-1よりもかなり 0 に近い所に取るという不適切な解答であったという。この原因を弧度と角度の混同とし，ここでも三角関数における弧度と角度という「提示される文脈についての知識」が関係するとしている。

第 3 に，問題の対象となる関数についての「基礎をなす概念についての知識」が表現の翻訳と関わるとする。これは，xが有理数ならばその値を，無理数ならば 0 をとる関数のグラフを書く問題に対する解答から例証されている(図 1

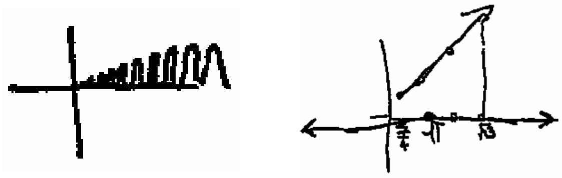


図 1　基礎をなす概念についての知識が関わる解答例

参照)。この関数においては，たとえば有理数や無理数が実数において稠密であるという知識が表現翻訳と関わっていると考えられる。

1.3　2 次不等式表現の翻訳・処理の場合

これら Even(1998)が示す 3 つの知識は，2 次不等式に関する問題(以下，2 次不等式の問題)を関数アプローチによって解く際においても，式表記とグラフ表現間の翻訳に関係していると考えられる[4)]。しかし，2 次不等式の問題の解決に至る過程には式表記とグラフ表現間の翻訳以外にも表現翻訳や処理(以下，表現翻訳等)が考えられ，その表現翻訳等に関係する知識や，それが行われるための条件が別に存在するはずである。また，Even(1998)が取り上げた知識とは別の式表記とグラフ表現間の翻訳に関係する知識が存在するかもしれない。そこで，本稿では高校生に対する質問紙と面接による調査をもとに，2 次不等式の問題の解決過程における表現翻訳等に関係する知識や，それが行われるための条件を明らかにすることを目的とする。

2．分析枠組みと調査概要

ここでは，2 次不等式の問題の解決に至るまでの，いくつかの基本となる表現(基本表現)と，表現翻訳等の流れを図示する図式[5)]を定める。そして，最も一般的な 2 次不等式の問題と考えられる $ax^2+bx+c>0$ (ただし，$a>0$)の解決に至るまでの，基本表現間ごとの表現翻訳等に必要となる知識を例示する。

2.1　代数的アプローチにおける分析枠組み

初めに，代数的アプローチにおいて考えられる，問題とその解答の基本表現と図式(図 2)を定める。代数的アプローチは，「$ax^2+bx+c>0$」という「不等式表記」に式変形の処理をほどこすことでその「解表記」を得る方法である。そして，その過程は解を得ることができる式表記「解不等式表記」への式変形までの過程(過程 1)と，解不等式表記から解表記を得るまでの過程(過程 2)の 2 つに分けて考えることができる。具体的な解不等式表記として次の 3 つがあげられる。

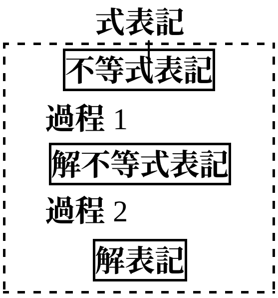


図 2　代数的アプローチの図式

- 「$(x-a)(x-b)>0$」や「$(x-a)(x-b)<0$」という因数分解による式表記[6)]
- 「$a(x-p)^2+q>0$」(ただし，$q\geqq 0$)という標準形への式表記
- 判別式の符号についての式表記「$b^2-4ac<0$」や「$b^2-4ac=0$」

続いて，過程 1 と，過程 2 の表現処理に用いられる主な知識をあげる。

[過程 1 に関する知識]

- 実数の範囲の因数分解
- 不等式の符号についての性質
- 標準形への式変形
- 判別式の符号と，不等式の解との関係

[過程 2 に関する知識]

- $(x-a)(x-b)$ の符号をいくつかの場合に分け調べること[7)]
- たとえば，「$a<0$ かつ $b<0 \Rightarrow ab>0$」という実数の性質
- 「$a^2\geqq 0$」という実数の性質
- 「$ab>0 \Leftrightarrow a>0$ かつ $b>0$，または $a<0$ かつ $b<0$」という実数の性質

以上のように，代数的アプローチにおいては主として解不等式表記への式変形のための知識と，解不等式表記から解表記を得るための実数の性質についての知識が求められる。

2.2　関数アプローチにおける分析枠組み

次に，関数アプローチにおいて考えられる，問題とその解答の基本表現を定める。関数アプローチでは，不等式表記から，対応する関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフの x 軸との位置関係や概形を表す「グラフ表現」へと翻訳され，グラフ表現は不等式表記の符号の解釈により「解グラフ表現」へと処理され(図 3)，それが不等式の解表記へと翻訳される。このように関数アプロー

図 3　グラフ表現と解グラフ表現の例

チでは，代数的アプローチにおける式表記の変形による処理が，座標平面上の視覚的な処理に代わる。

そして，関数アプローチにおける解に至るまでの過程は，不等式表記からグラフ表現を得るまでの過程(過程 a)，グラフ表現から解グラフ表現を得るまでの過程(過程 b)，そして解グラフ表現から解表記を得るまでの過程(過程 c)の 3つに分割して考えることができる。よって，図式は以下のように定められる(図 4)。

式表記　　　　　　　　　　視覚的表現

不等式表記　　――――　　グラフ表現

　　　　　　過程 a　　　過程 b

　　　　　　過程 c

解表記　　　――――　　解グラフ表現

図 4　関数アプローチの図式

続いて，代数的アプローチの場合と同様に，各過程の表現翻訳等に用いられる主な知識を列挙する。

[過程 a に関する知識]

- 実数の範囲の因数分解
- 対応する 2次方程式を解くこと
- 標準形への式変形
- 判別式の符号と，グラフと x 軸との位置関係の対応

(以下，これらを「グラフ表現を書く知識」とよぶ)

[過程 b に関する知識]

- グラフ上の点で $y>0$ をみたす x の値を解グラフ表現として表現または表象すること

[過程 c に関する知識]

- 該当する解グラフ表現における x 軸上の部分を読み取り，式表記すること

以上のように，関数アプローチにおいては主としてグラフを書く知識，解グラフ表現や解表記にそれぞれ処理，翻訳することが求められる。

2.3　調査概要

本調査は，平成 13 年 12 月に秋田県の公立高等学校 1 年生 34 名と，平成 14 年 1 月に茨城県の私立高等学校 1 年生 23 名とに対して行った。秋田県の公立高校の 34 名は平成 13 年 6 月から 7 月にかけて，茨城県の私立高校の 23 名は平成 13年の 1月から 2月にかけて 2次不等式の指導を受けており，また，合わせて 7 名以上の教師が指導に当たっていた。「考えた式や図などをできるだけ省略せずに，できるだけ詳しく」答えることを求める文章を添え，2 次不等式の問題からなる質問紙による調査を行った。本稿では，そのうちの次の 2問について取り上げる。

問題 1　2次不等式 $x^2+2x+1>0$ を解きなさい。 問題 2　2次不等式 $x^2+2x+k+3>0$ の解がすべての数となるように，定数 k の値の範囲を定めなさい。

3．調査結果とその分析

3.1　問題 1の調査結果とその分析

問題 1　2 次不等式 $x^2+2x+1>0$ を解きなさい。
解答例 1[8)]　$(x+1)^2>0$　よって，$x\neq-1$
解答例 2　$(x+1)^2>0$ $(x+1)^2=0$ のとき $x=-1$ よって，-1以外のすべての数 

問題 1は 2次不等式から，その解を求める問題である。先にあげた代数的アプローチ，関数アプローチ双方による解決に至る過程を図式で表すと図 5のようになる。以下では，表現翻訳等に関係する知識やそれが行われるための条件について，生徒の誤った解答から，過程ごと考察する。

式表記　　　　　　　　　　視覚的表現

不等式表記　　――――　　グラフ表現

　　過程 1　　過程 a

解不等式表記　　　　　　　　過程 b

　　過程 2　　過程 c

解表記　　　――――　　解グラフ表現

図 5　問題 1の解表記を得るまでの図式

主な誤答	人数（割合）
過程 1（方程式からの類推）	16 名（28%）
過程 a	4 名（ 7%）
過程 b または過程 c	2 名（ 4%）
無解答	4 名（ 7%）

表 1　問題 1の主な誤答の分類

不適切な式表記ではあるが，文字式に対する処理により解答を求めようとしたという点で代数的アプローチによると考えられる，図 6 のような誤答が見られた。これは不等号を等号に代えると，方程式 $x^2+2x+1=0$ の解法となることから，方程式の解法からの類推による誤答と考えられる。

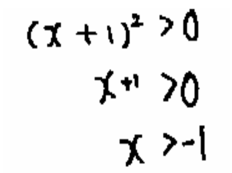


図 6　方程式の解法からの類推による誤答

関数アプローチにおける，過程 a の翻訳に関係する知識としては，第 1 に，不等式の問題に対してグラフを用いて解く方法が考えられること自体を知っているかどうかということがあげられる。方程式からの誤った類推による解答の一因はここにあると考えられる。第 2 に，対応する関数をグラフ表現へと翻訳するための，グラフを書く知識があげられる。これは 2 次関数という「提示される文脈についての知識」に含まれる。

また，過程 a のグラフを書く知識に関して，式表記を多義的に捉えるという式表記の見方が表現翻訳に関係する。これは本調査の対象者の解答によるものであり，「2 次不等式 $x^2+4x+4\geqq 0$ を解きなさい」という類似する問題の解答後に行った生徒 S の内省報告から示唆される。

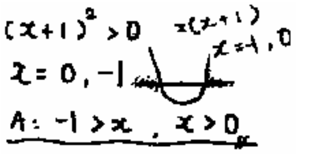
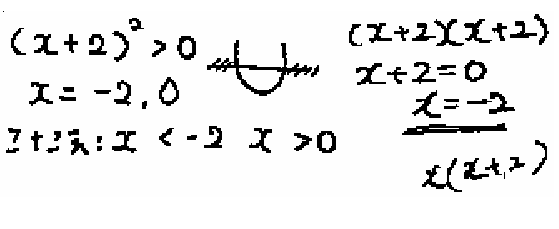


図 7（左）図 8（下）式表記を多義的に捉えていない誤答



25　I：この問題で，ここ［ $x^2+4x+4>0$ ］からここ［図 8 左 1 行目］は，因数分解？
26　S：はい。
27　I：因数分解したね。
28　S：はい。
29　I：つぎ，ここ［図 8 左 1 行目］から $x=-2$ って出たね。これって，-2 って，どこからきたっけ。
30　S：えーっと。え，なんか。なんだろ。そういうふうにやったような気がして。前，なんか，$x+2$，これ［ $(x+2)^2$ ］がこれ［図 8 右 1 行目］のことじゃないですか。で。なんだっけ。x が，なにやったんだろ。わかんない。これが 0 だと考えると［図 8 右 2 行目］，x は -2 だから，みたいな感じで。
31　I：ここ［図 8 右 2 行目］が 0 だと。
32　S：だけど，何でこれ［図 8 左 2 行目］を出したのか自分でも良くわかんない。あれ。でも，これはこういう風に習ったような気がしたんで。
33　I：ここ［図 8 左 2 行目］，自分でも良くわからない？
34　S：ここあれなんでだろ。よく分かんないけど。でも，なんか，これは違うかもしれない。
35　I：これ［図 8 左 2 行目　$x=0$ ］はどういうふうなことで，出てきたんだっけ。
36　S：え，あれ。
37　I：なんか考えがあったんだっけ。
38　S：えー，なんか。あれ。0 を当てはめると。ほんと，寝ぼけてたんですよ，あのときほんとに。今もなんか変なんですけど。なんか，x の $x+2$，このときって -2 と 0 だった気がするんですよ。あっ，これ［図 8 左 2 行目　$x=0$ ］が間違っているんだ。こいつ［ $(x+2)^2$ ］とこいつ［図 8 右 4 行目］を勘違いしていて。たぶん，それで，0 でも当てはまるんだなっと思ってこう書いたんで。
39　I：あー，そっかそっか。
40　S：はい。
41　I：これ［図 7］も説明してほしい。
42　S：たぶんこれもそうです。んーと，これ［図 7 左 1 行目］をこれ［図 7 右上 1 行目］と勘違いしていて。

生徒 S の内省報告によると，$(x+2)^2$ を $x(x+2)$ と勘違いし(38)，対応する関数と異なる関数のグラフを描き，誤った解答を得たことに自ら気づいた(38)。ここで，生徒 S は $(x+2)^2$ を因数分解された式として捉えている(25 ‐ 28)が，その同じ式を標準形としてはとらえていないと考えられる。なぜなら，もし関数 $y=(x+1)^2$ を標準形としても捉えていたならば，グラフの頂点の y 座標への注目から，頂点の位置に関して誤った表現翻訳には至らなかったと考えられるからである。$(x+1)^2$ と $x(x+1)$ についても，同様である(42)。

この，式表記を多義的に捉えることなく誤答に至った，しかも多義的に捉えることができれば表現翻訳の誤りを防ぐことができる例から，式表記を多義的に捉えるという式表記の見方が表現翻訳に関係することが示される。

過程 b においては，そこでの表現処理の根拠を示すことができる生徒がいる一方で，処理の根拠を生徒が示すことができない，しかも誤った処理を行った誤答が，本調査と同時に実施した「2 次不等式 $x^2+2x+1\geqq 0$ を解きなさい」と

いう問題の解答において見られた(図 9)。

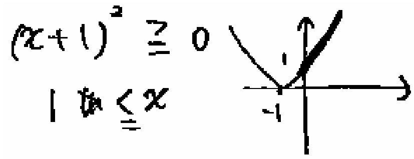


図 9　誤った表現処理による誤答

この解答を行った生徒は，過程 b における処理の根拠を示すことができなかった。このことは, グラフ表現の処理において$y \geqq 0$という条件を$x \geqq 0$と読み違えていると考えられることと，生徒の内省報告における「あれっ，私なにやってるんだろ。」という発話から判断される。また，過程 b においては，不等式$x^2+2x+1 \geqq 0$を関数$y=x^2+2x+1$のグラフ表現で処理することから，$y \geqq 0$という条件をグラフ表現において解釈し，処理することが求められる。この$y=x^2+2x+1$と$y \geqq 0$をみたすxの範囲を求めることは, 無限集合$\{y \mid y \geqq 0\}$からその逆像$\{x \mid y=x^2+2x+1$ ただし，$y \geqq 0\}$ を求めることに他ならない。したがって，過程 b の処理には，関数の逆像を求めるという表現処理の根拠を生徒が推論できるかどうかが関係していると考えられる。

また,「異なるアプローチについての知識」, 特にx軸との接点という特定の点に注目する「点別アプローチの知識」によって，誤答「すべての数」ではなく正しい解答へと至ると思われる例も見られた(図 10)。

図 10　点別アプローチの知識に関わる誤答

3.2　問題 2 の調査結果とその分析

問題 2　2 次不等式$x^2+2x+k+3>0$の解が，すべての数となるように，定数kの値の範囲を定めなさい。

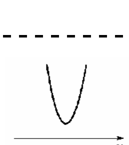
解答例 1　$(x+1)^2+k+2>0$

$(x+1)^2 \geqq 0$ なので，$(x+1)^2=0$のときに成り立てばよい。

よって$k+2>0$　より，$k>-2$

解答例 2　$2^2-4\cdot1\cdot(k+3)<0$

これを解いて　$k>-2$



問題 2 は，2 次不等式とその解から，不等式の係数に含まれる定数の値の範囲を定める問題である。最終的に求めるものは 2 次不等式そのものではないけれども，得られる定数の値の範囲が，解の条件をみたす 2 次不等式を定めるという点で，2 次不等式を決定すると見なせば，解答例 1, 解答例 2 の解決に至る過程は図 11 のようになる。

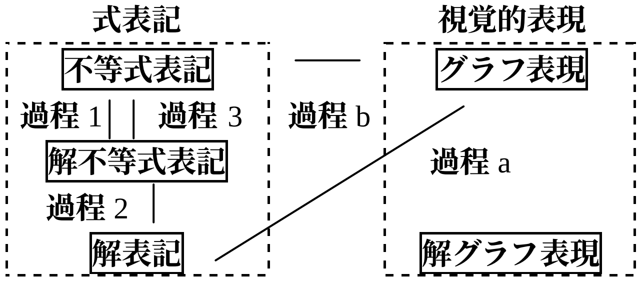


図 11　問題 2 の不等式表記を得るまでの図式

主な誤答	人数(割合)
グラフ表現なし判別式符号違い	15 名(26%)
過程 b(グラフ表現あり)	7 名(12%)
過程 3	3 名(5%)
無解答	13 名(23%)

表 2　問題 2 の主な誤答の分類

本調査における解答例 1 のような代数的アプローチと考えられる解答(表 2, 過程 3 に分類)は，解不等式表記を得てはいるが，正解に至っていなかった。以下では，正解に至らない原因が主に過程 3 の処理に関わっていることと，何がその処理に関係しているかについて考察する。

代数的アプローチと考えられる生徒の解答は, 解不等式表記「$k>-(x+1)^2-2$」,「$(x+1)^2+k+2>0$」,「$(x+1)^2>-(k+2)$」への式変形を行ったのみであった。その解不等式表記に，問題文にて提示された「すべての数」という解表記の解釈を加えることで，kの範囲についての不等式表記を得ることができる。解不等式表記を得た生徒は, 解不等式表記と，残された条件である解表記の双方を考慮することで，不等式表記を得ようとしたと考えられる。したがって，過程 3 における処理において，何らかの理由から不等式表記に至らなかったものと考えられる。その理由としては，たとえば解不等式表記「$(x+1)^2+k+2>0$」に対しては，「$(x+1)^2=0$のと

き」に不等式表記が成り立てばよいことを得るためには，$(x+1)^2 \geqq 0$ を考慮したとしても，それ以外の $\{x \mid (x+1)^2 > 0\}$，つまり $\{x \mid x \neq -1\}$ という無限集合に属するすべての x の値についてそれぞれ解不等式表記が成り立つことの確認が一見必要であるように思われることがあげられる。このように，解不等式表記をみたす解集合に属する値についての一見有限回ではすまない確認を行うことができることが，解不等式表記から不等式表記への処理に関係する。

また，本問においては，グラフ表現の記入がなく，誤った判別式の符号による誤答や，無解答による不正解が多く見られた。そこで，その理由が関数アプローチにおける過程 a の表現翻訳にあると考え，追加的な質問紙による調査を行った。以下では, その追加的な調査によって，過程 a の表現翻訳が可能となるには，ある必要条件があることを示す。

この追加的な調査は，茨城県の私立高校の生徒 28名に対して行った2次不等式の問題からなる質問紙調査の一部である。2 次不等式の解表記から対応するグラフ表現への翻訳を求める問題(問題 3)に 1問以上正解した 13名のうちの 10名に対して，その翻訳の逆であるグラフ表現から解表記を読み取る以下の問題 4 の質問紙調査を行った。

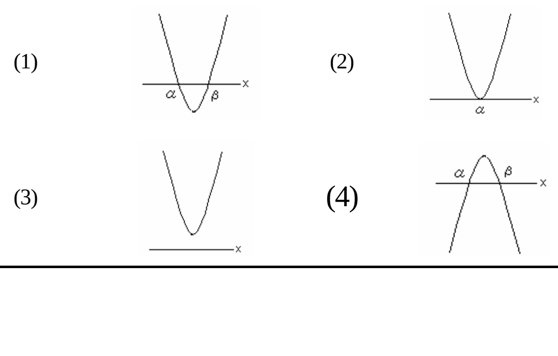
問題 3　2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解が次のようになるとき，関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを，グラフの概形や x 軸との位置関係をふまえて図示しなさい。

(1) すべての数　　(2) $x \neq a$

(3) $x<a$，$b<x$　（ただし，$a<b$）

(4) $a<x<b$

問題 4　2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ を解きなさい。ただし，図は関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである。



その結果，問題の主旨を読み違えたと考えられる 2 名(S9，S10)を除いた 8 名の，解表記からグラフ表現への翻訳を求める問題に正解した生徒は，対応するグラフ表現から解表記への翻訳を求めるの問題にも正解した(表 3)。しかも，グラフ表現から解表記への翻訳が可能であっても，その翻訳の逆が可能でない場合が存在した(たとえば，問題 3 S1(4)，S2(1)(2)など)。このことから，グラフ表現から解表記への翻訳が可能であることが，解表記からグラフ表現への翻訳が可能であるための必要条件となっていると考えられる。

○：正解	問題 3				問題 4			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
S1	○	○	○		○	○	○	○
S2			○	○	○	○	○	○
S3	○	○			○	○	○	○
S4	○				○	○	○	○
S5	○				○	○	○	○
S6	○				○	○	○	○
S7	○				○			○
S8	○				○			
S9	○				※1			
S10	○				※2			

※1　2 次不等式の解ではなく, 2 次方程式の解を答えた。

※2　2 次不等式の解ではなく，a や b^2-4ac の符号などを答えた。

表 3　問題 3・4 の生徒の解答結果

この結果は，過程 a における以下の思考過程についての考察を支持する。たとえば，不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解表記 $a<x<b$ から対応するグラフ表現へと翻訳する場合について考える。解表記には α，β の 2 文字があることから，対応する関数のグラフの x 軸との共有点が 2 個であることが予想されるとしても，そのグラフが上に凸か下に凸かを判断するには，内的にしろ外的にしろ，グラフ表現から解表記への翻訳が必要である。こうして，問題 2 の解決には，対応するグラフ表現を解表記に翻訳できることが前提となり，このグラフ表現から解表記への翻訳

ができないことが，問題 2 におけるグラフ表現の記入がなく，誤った判別式の符号による誤答や，無解答の要因のひとつと考えられる。

４．まとめ

本稿では，2 次不等式の問題の解決過程における表現翻訳等に関係する知識や，それが行われるための条件を，高校生に対する調査から考察した。その結果，主として次の結果が得られた。

第１に，式表記からグラフ表現への翻訳において，式表記を多義的に捉えるという式表記の見方が表現翻訳に関係することを示した。第 2 に, グラフ表現から解グラフ表現への処理には, 関数の逆像を求めるという表現処理の根拠を生徒が推論できるかどうかが関係していると考えられる。第 3 に，解不等式表記をみたす解集合に属する値についての一見有限回ではすまない確認を行うことができることが，解不等式表記から不等式表記への処理に関係していることを考察した。第 4 に，グラフ表現から解表記への翻訳が可能であることが，解表記からグラフ表現を得ることが可能であるための必要条件であることを明らかにした。

これらの結論のうち，第 1 の結論は Even(1998)が取り上げた知識とは別の，式表記とグラフ表現間の翻訳に関係する知識と考えられ，第 2, 第 3, 第 4 の結論は，Even(1998)で扱われた式表記とグラフ表現間の翻訳以外の表現翻訳等に関わるものである。

今後の課題は，いくつかの仮説を調査によって確認することである。

註

１) たとえば, Bazzini(2001)は, algebraic approach という用語を用いている。

２) たとえば, Bazzini(2001)は functional approach という用語を用い,「関数の比較に基づくアプローチ」と規定している。また，Dreyfus & Eisenberg (1985) は，graphical approach や graphical method とよんでいる。

３) 2 次不等式が関数アプローチによって導入されたとしても，生徒がその一方のアプローチによる解法のみに固執しなければならないわけではない。なぜなら，たとえば生徒が，式変形のみによる解決が可能になり，文字式の処理だけで解の範囲が定まる代数的アプローチによる解法のよさに気づくことも考えられるからである。

４) たとえば，関数のグラフを描くためにその概形を全体的に捉えたり，x 軸との共有点という特定の点に注目したりする知識や，グラフと x 軸との位置関係と係数についての式(判別式)の符号との関係といった知識があげられる。

５) すべての生徒の思考過程がこの図式に従うという意味のものではない。

６) α，β は有理数とは限らない。そのときは，2 次方程式の解の公式についての知識が求められることがある。

７) 以下のような視覚的表現を利用して処理することも可能である。

x	$x<a$	a	$a<x<b$	b	$b<x$
$x-a$	－	0	＋	＋	＋
$x-b$	－	－	－	0	＋
$(x-a)(x-b)$	＋	0	－	0	＋

８) 解答例 1 は外部表現だけからは，代数的アプローチによる解答か関数アプローチによるものかの判定はできない。

参考文献

Bazzini, L. et al. (2001). Revealing and promoting the students' potential in algebra: A case study concerning inequalities. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, 53-60.

Dreyfus, T., & T. Eisenberg (1985). A graphical approach to solving inequalities. *School Science and Mathematics*, *85*, 651-662.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.

Goldin, G., & N. Shteingold (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The Role of Representation in School Mathematics, 2001Yearbook* (pp.1-23). NCTM.