【専門科目】（教科教育専攻・数学教育コース）

（平成 30 年度入試の問題）

問題は全部で 5 題あります。 ［教科教育］については 2 題（問 1，問 2）とも解答すること．ただし，問 2 については，a, b から 1 つを選んで解答すること． ［教科専門］については，3 題（[I]，[II]，[III]）とも解答すること．ただし，[III] については，3 つの問題（代数，幾何，解析）の中から 1 つを選択して解答すること．

専門科目［教科教育］

問 1． 教科としての数学科の本質に根ざす「数学的な見方・考え方」が, 生徒の学年や学校段階が進むにつれて, どのように働くか, またどのようにして成長していくかについて, 例を挙げて説明しなさい．（400 字以内）

問 2． 次の a, b の各問のうち，一つを選び，その選択を明記したうえで論述しなさい．（400 字以内）

a. 帰納的推論とはどのようなことか，算数または数学の問題とその考え方の具体例を挙げて，説明しなさい．

b. 20 世紀初頭における欧米の数学教育改良運動が, 日本の数学教育に対して与えた影響を説明しなさい．

専門科目［教科専門］

[I] i は $\sqrt{-1}$ を表すとする．

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 3-i \\ 3 & 1+2i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 4 & -2+i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 積 AB を求めよ．

(2) 行列 C の転置行列，トレース，逆行列を求めよ．

(3) 行列 D の行列式を求めよ．

(4) S が複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^3$ の中で線形従属であることを示せ．

[II] 関数

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad (x > 0)$$

について次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) $g(x) = x^{\frac{1}{f(x)}}$ $(x > 0)$ は単調増加であることを示せ．

[III]

代数. $\mathbb{Q}[X]$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の多項式環とし, k を整数とする. I_k を多項式

$$f_k(X) = X^3 + kX - 1$$

により生成される $\mathbb{Q}[X]$ の単項イデアルとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 方程式 $f_k(X) = 0$ が有理数解 α を持てば, α は整数であることを示せ.

(2) 剰余環 $\mathbb{Q}[X]/I_k$ が体とならない整数 k をすべて求めよ.

幾何. $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする. $x, y \in \mathbb{R}$ に対し

$$d(x, y) = |x - y|$$

と定める.

(1) d が $\mathbb{R}$ 上の距離関数となることを示せ.

(2) 開区間 $(0, 1)$ は $\mathbb{R}$ の部分空間として $\mathbb{R}$ と同相であることを示せ.

(3) 開区間 $(0, 1)$ において, コーシー列であるが $(0, 1)$ 内では収束しない点列を 1 つ挙げよ.

解析. α を定数とし, 複素関数 $f(z)$ を $f(z) = e^z \left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{\alpha}{z^3} \right)$ で定める.

(1) $g(z) = z^3 f(z)$ とし, $g(z)$ の $z = 0$ におけるテイラー展開を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とおく. 係数 c_0, c_1, c_2, c_3 の値を α を用いて表せ.

(2) $f(z)$ の $z = 0$ での留数を α を用いて表せ.

(3) 原点を中心とする半径 1 の円周を C とする. また $z = -1$ から C に沿って時計まわりに $z = 1$ に至る曲線を C_+ とし, $z = -1$ から C に沿って反時計まわりに $z = 1$ に至る曲線を C_- とする. $\displaystyle\int_{C_+} f(z)dz = \int_{C_-} f(z)dz$ となる α の値を求めよ.